FMC2, 2018.2
(Turmas do Thanos)

Provinha 0
(points: 0; bonus: $0^\flat$; time: 66'+33')

Alun$*$: **Prof$*$:**

03/08/2018

(Resolva todos os problemas.)

Instruções:

Modo aluno: Escreva teu nome no campo "Alun$*$" em cima, e use a mesma caneta para responder em todos os problemas da prova.

No tempo determinado entregue tua prova para receber uma de outro aluno da turma.

Modo professor: Usando uma caneta de cor diferente daquela que teu aluno escolheu usar, escreva teu nome no campo "Prof$*$" em cima, e corrija sua prova. Não escreva qual seria uma resposta correta, apenas identifique os erros, dando uma curta explicação quando possível.

Lembre-se:

Definição 1.
Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. O a *divide* o b (escrevemos $a \mid b$) sse[1] existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $aq = b$.

Definição 2.
Sejam $a, b, m \in \mathbb{Z}$. Escrevemos $a \equiv b \pmod{m}$ sse $m \mid a - b$.

[1] escrevemos *sse* como uma abreviação da frase *se e somente se*

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) de "ímpar". Não suponha que o leitor sabe o que é um número par.

DEFINIÇÃO.

Um número inteiro x é *ímpar* sse existe inteiro k tal que $x = 2k + 1$.

A2. Usando uma fórmula de lógica, expresse a afirmação

"todas as potências de qualquer número ímpar são ímpares também".

FÓRMULA:

$$(\forall a \in \mathbb{Z})\,[\,\mathrm{Odd}(a) \to (\forall n \in \mathbb{N})\,[\,\mathrm{Odd}(a^n)\,]\,]$$
$$\text{onde} \qquad \mathrm{Odd}(x) \overset{\text{def}}{\iff} (\exists k \in \mathbb{Z})\,[\,x = 2k + 1\,]$$

A3. Usando indução prove a afirmação do **A2**.

PROVA.

Seja $a \in \mathbb{Z}$ ímpar e logo seja $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2k + 1$. Vou provar por indução que para todo $n \in \mathbb{N}$, a^n é ímpar também.

BASE. Temos $a^0 = 1$ e 1 é ímpar (pois $1 = 2 \cdot 0 + 1$ e $0 \in \mathbb{Z}$).
PASSO INDUTIVO. Suponha $t \in \mathbb{Z}$ tal que a^t é ímpar, logo seja $k' \in \mathbb{Z}$ tal que $a^t = 2k' + 1$. Basta provar que a^{t+1} é ímpar. Calculamos:

$$\begin{aligned}
a^{t+1} &= a^t a \\
&= (2k' + 1)(2k + 1) \\
&= (4kk' + 2k + 2k') + 1 \\
&= 2\underbrace{(2kk' + k + k')}_{\in\mathbb{Z}} + 1
\end{aligned}$$

e logo a^{t+1} é ímpar.

B

Prove ou refute as afirmações:

B1. Todo inteiro divide ele mesmo.

PROVA OU REFUTAÇÃO.

Eu vou provar a afirmação.

Seja $a \in \mathbb{Z}$. Como $a \cdot 1 = a$ e $1 \in \mathbb{Z}$, temos $a \mid a$.

B2. Sejam naturais a, b com $a \neq b$. Para todo inteiro $m > 1$,

$$a \equiv b \pmod{m} \implies 3^a \equiv 3^b \pmod{m}.$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.

Considere como contraexemplo o

$$\begin{aligned} m &:= 3 \\ a &:= 0 \\ b &:= 3 \end{aligned}$$

Observe que realmente

$$0 \equiv 3 \pmod{3}$$

mas mesmo assim

$$3^0 \not\equiv 3^3 \pmod{3}.$$

B3. Chamamos um inteiro x *bacana* sse $x \mid x+1$. Existem exatamanete dois inteiros bacanas.

PROVA OU REFUTAÇÃO.

Como 1 e -1 são bacanas, basta mostrar que nenhum outro inteiro pode ser bacana.

Suponha que x é um inteiro bacana. Preciso concluir que $x = 1$ ou $x = -1$. Como x é bacana, $x \mid x + 1$. Logo seja $k \in \mathbb{Z}$ tal que $xk = x + 1$. Temos então $xk - x = 1$, ou seja $x(k - 1) = 1$. Logo $x \mid 1$ (pois $k - 1 \in \mathbb{Z}$), e logo $x = 1$ ou $x = -1$. (Por quê?)

Só isso mesmo.