FMC2, 2018.1
(Turma N12 do Thanos)

Prova 2.X
(points: 14; bonus: $0^\flat$; time: 28')

Nome: Θάνος **Gabarito**

23/05/2018

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\text{Colar}(x) \to \neg\text{Passar}(x, \text{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la.*

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo!

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

Lembram-se:

Definição. Seja G grupo e $H \subseteq G$. O H é um subgrupo de G (escrevemos $H \leq G$) sse H forma um grupo com a mesma operação (restrita no $H \times H$).

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bônus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

(6) **A**

Seja G conjunto e $H \leq G$. Defina no G a relação R pela

$$a \mathrel{R} b \overset{\text{def}}{\iff} ab^{-1} \in H.$$

Prove que R é uma relação de equivalência.
Prova.

Reflexiva: Seja $a \in G$. Calculamos:

$$\begin{aligned} a \mathrel{R} a &\iff aa^{-1} \in H && \text{(def. } R\text{)} \\ &\iff e \in H && \text{(def. } a^{-1}\text{)} \end{aligned}$$

que é verdade pois $H \leq G$.

Transitiva: Sejam $a, b, c \in G$ tais que $a \mathrel{R} b$ e $b \mathrel{R} c$. Precisamos mostrar que $a \mathrel{R} c$, ou seja, mostrar que $ac^{-1} \in H$. Temos

$$\begin{aligned} ab^{-1} &\in H && (a \mathrel{R} b) && (1) \\ bc^{-1} &\in H && (b \mathrel{R} c) && (2) \\ (ab^{-1})(bc^{-1}) &\in H. && \text{(pelas (1) e (2) pois } H \leq G\text{)} \end{aligned}$$

Logo $ab^{-1}bc^{-1} = ac^{-1} \in H$.

Simétrica: Sejam $a, b \in G$ tais que $a \mathrel{R} b$, ou seja, $ab^{-1} \in H$. Vamos provar que $b \mathrel{R} a$, ou seja, queremos $ba^{-1} \in H$. Mas como H é fechado pelos inversos e $ab^{-1} \in H$, temos que $(ab^{-1})^{-1} \in H$. Mas calculando

$$\begin{aligned} \left(ab^{-1}\right)^{-1} &= \left(b^{-1}\right)^{-1} a^{-1} && \text{(inv. de op.)} \\ &= ba^{-1} && \text{(inv. de inv.)} \end{aligned}$$

ou seja, $ba^{-1} \in H$.

(8) **B**

Definição. Dado um grupo G, definimos seu *centro* $Z(G)$ como o conjunto de todos os membros de G que "comutam com todos os membros de G":

$$Z(G) \stackrel{\text{def}}{=} \{\, z \in G \mid \text{para todo } g \in G,\ zg = gz \,\}.$$

Teorema. Seja G grupo. $Z(G) \leq G$.
Prova.

Primeiramente observe que $Z(G) \neq \emptyset$: $e \in Z(G)$ pois para todo $g \in G$, $eg = e = ge$ pela definição de e. Como $\emptyset \neq Z(G) \subseteq G$, precisamos apenas mostrar que:

FECHADO PELA OPERAÇÃO DO G:
Sejam $x, y \in Z(G)$. Para $xy \in Z(G)$ verificamos que o (xy) comuta com todos os elementos de G. Seja $g \in G$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
(xy)g &= x(yg) && \text{(G1)}\\
&= x(gy) && (y \in Z(G))\\
&= (xg)y && \text{(G1)}\\
&= (gx)y && (x \in Z(G))\\
&= g(xy) && \text{(G1)}
\end{aligned}$$

FECHADO PELOS INVERSOS:
Seja $x \in Z(G)$. Para $x^{-1} \in Z(G)$ verificamos que o x^{-1} comuta com todos os elementos de G. Seja $g \in G$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
x^{-1}g &= \left(\left(x^{-1}g\right)^{-1}\right)^{-1} && \text{(inv. de inv.)}\\
&= \left(g^{-1}\left(x^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1} && \text{(inv. de prod.)}\\
&= \left(g^{-1}x\right)^{-1} && \text{(inv. de inv.)}\\
&= \left(xg^{-1}\right)^{-1} && (x \in Z(G))\\
&= \left(g^{-1}\right)^{-1}x^{-1} && \text{(inv. de prod.)}\\
&= gx^{-1} && \text{(inv. de inv.)}
\end{aligned}$$

Só isso mesmo.