
Nome:

11/06/2018

Regras:

- I. Não vires esta página antes do começo da prova.
- II. Nenhuma consulta de qualquer forma.
- III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).¹
- IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.
- V. $\forall x(\text{Colar}(x) \rightarrow \neg \text{Passar}(x, \text{FMC2}))$.²
- VI. Use caneta para tuas respostas.
- VII. Responda dentro das caixas indicadas.
- VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.
- IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.
- X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo!
- XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.³
- XII. Responda em até 2 dos A, B, C, D, E, F.⁴

¹Ou seja, *desligue antes* da prova.

²Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

³Por exemplo, 25 pontos bônus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

⁴Provas com respostas em mais que três problemas não serão corrigidas (tirão 0 pontos).

Lembram-se:

Definição 1 (grupo; grupo abeliano). Um conjunto estruturado $\mathcal{G} = \langle G ; e, * \rangle$ é um *grupo* sse:

$$(\forall a, b \in G) [a * b \in G] \quad (\text{G0})$$

$$(\forall a, b, c \in G) [a * (b * c) = (a * b) * c] \quad (\text{G1})$$

$$(\forall a \in G) [e * a = a = a * e] \quad (\text{G2})$$

$$(\forall a \in G) (\exists y \in G) [y * a = e = a * y] \quad (\text{G3})$$

Se \mathcal{G} satisfaz as (G0)–(G3) em cima e a

$$(\forall a, b \in G) [a * b = b * a] \quad (\text{G4})$$

chamamos o \mathcal{G} *grupo abeliano*. Denotamos o inverso de $a \in G$ garantido pela (G3) com a^{-1} ou $(-a)$, dependendo se usamos notação multiplicativa ou aditiva para o grupo.

Definição 2. Sejam G grupo $g \in G$, e $A, B \subseteq G$. Definimos

$$gA \stackrel{\text{def}}{=} \{ga \mid a \in A\} \quad AB \stackrel{\text{def}}{=} \{ab \mid a \in A, b \in B\} \quad \dots \text{etc.}$$

Definição 3 (subgrupo). Seja G grupo e $H \subseteq G$. O H é um subgrupo de G (escrevemos $H \leq G$) sse H forma um grupo com a mesma operação (restrita no $H \times H$).

Definição 4 (conjugação). Seja G grupo e $a, b \in G$. Chamamos o b conjugado de a sse existe $g \in G$ tal que

$$a = bgb^{-1}.$$

Definição 5 (subgrupo normal). Um subgrupo $N \leq G$ é *subgrupo normal* de G sse

$$\begin{aligned} N \trianglelefteq G &\stackrel{\text{def}}{\iff} N \text{ é fechado pelos conjugados} \\ &\iff \text{para todo } n \in N \text{ e } g \in G, \quad gng^{-1} \in N \\ &\iff \text{para todo } g \in G, \quad gN = Ng \end{aligned}$$

Definição 6 (homomorfismo de grupo). Um *homomorfismo* φ do grupo $\langle A ; e_A, \cdot_A \rangle$ para o grupo $\langle B ; e_B, \cdot_B \rangle$ é uma função $\varphi : A \rightarrow B$ tal que:

- (i) para todo $x, y \in A$, $\varphi(x \cdot_A y) = \varphi(x) \cdot_B \varphi(y)$;
- (ii) $\varphi(e_A) = e_B$;
- (iii) para todo $x \in A$, $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$.

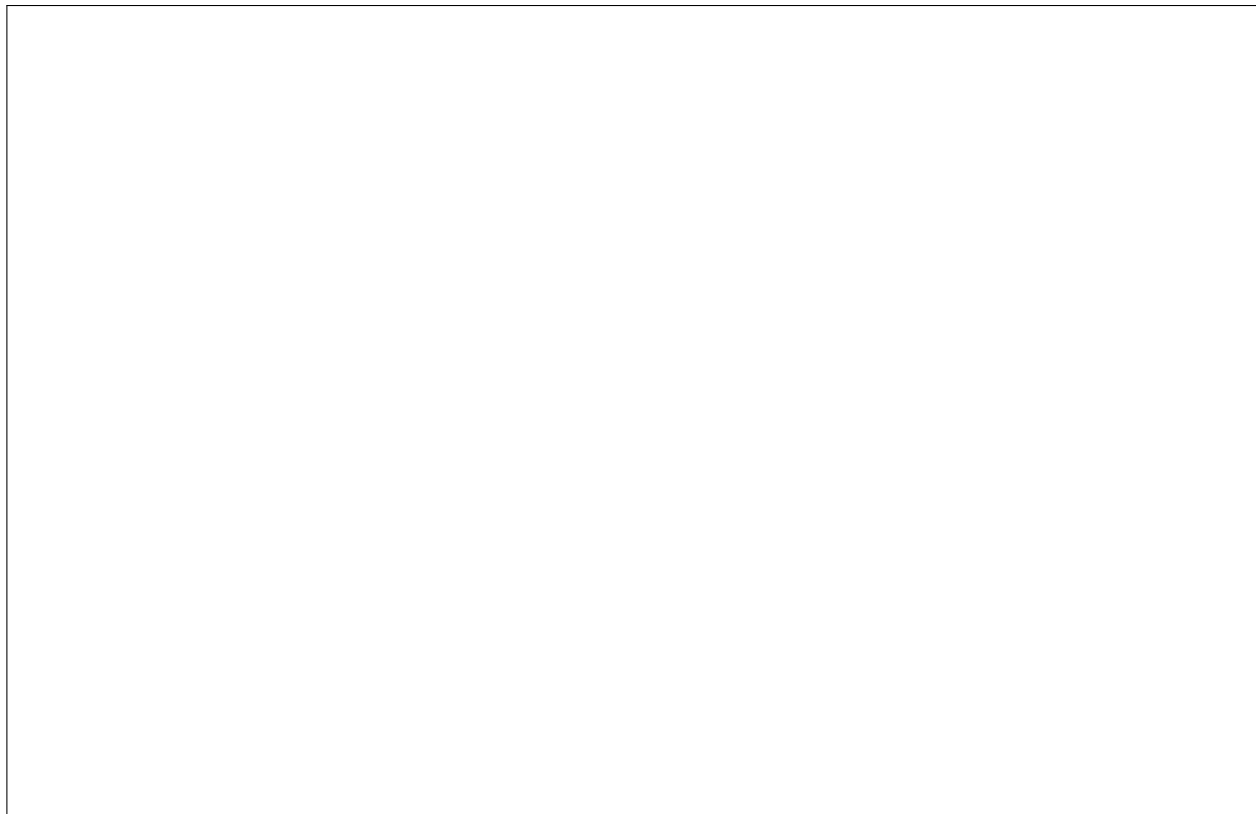
Definição 7 (kernel). Sejam A e B grupos e φ homomorfismo de A para B . Definimos

$$\ker \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A \mid \varphi(x) = e_B\}.$$

Boas provas!

(28) **A**

Seja G grupo e $\emptyset \neq H \subseteq G$. tal que para todo $a, b \in H$, $ab^{-1} \in H$. Prove que $H \leq G$.
PROVA.

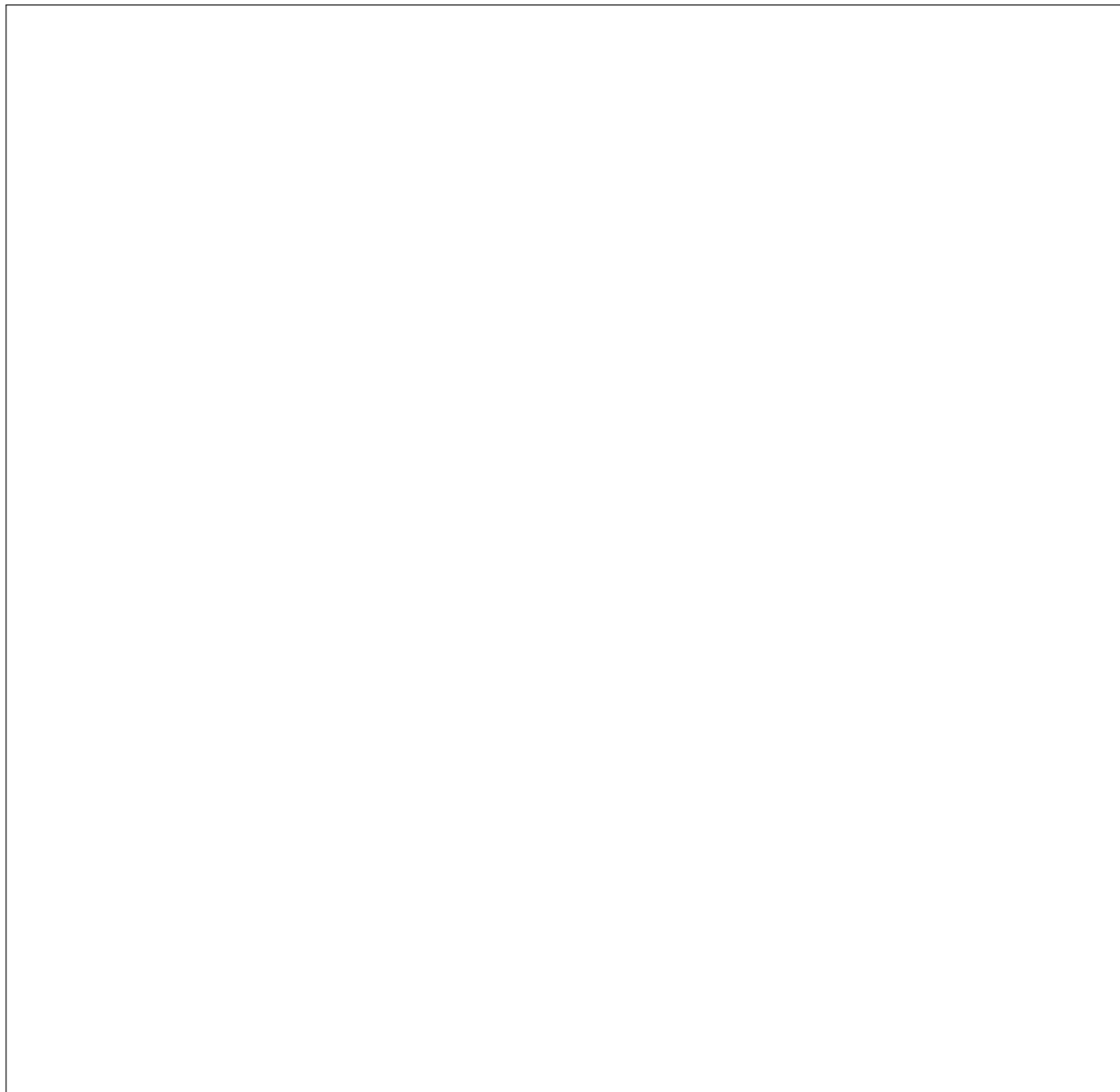


(32) **B**

Prove “from scratch” (usando apenas os (G0)–(G3)) a unicidade de inversos nos grupos.

Dica: Pode provar lemmata (resultados intermediários) para te ajudar.

PROVA.



(38) **C**

Definição. Um *monóide* é um conjunto estruturado $\mathcal{M} = \langle M ; \cdot, \epsilon \rangle$ que satisfaz as (G0)–(G2). Uma função $\phi : A \rightarrow B$ entre monóides é um homomorfismo sse ϕ respeita a estrutura:

(i) para todo $x, y \in A$, $\phi(x \cdot_A y) = \phi(x) \cdot_B \phi(y)$;

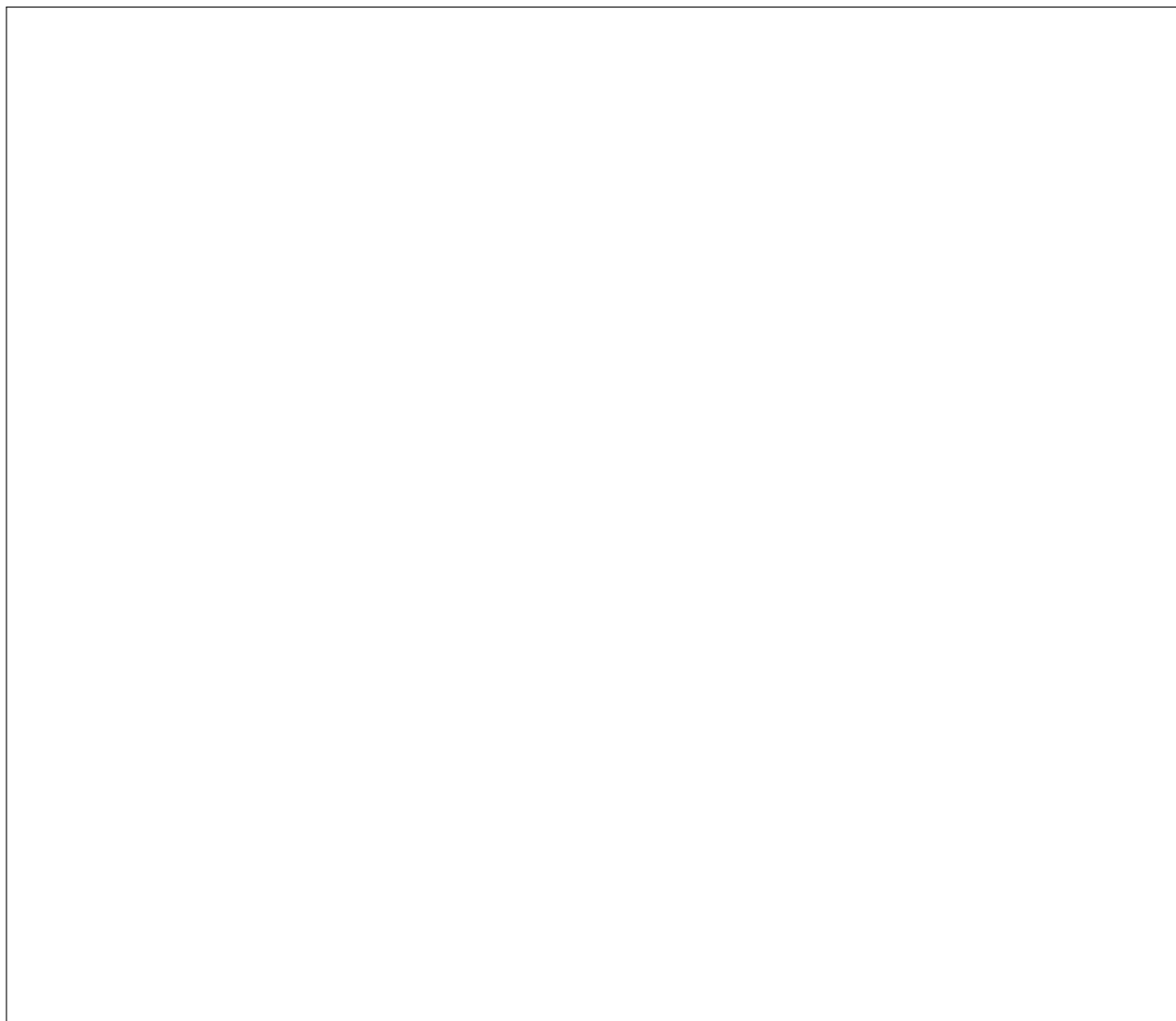
(ii) $\phi(e_A) = e_B$;

Teorema. Sejam M, N monóides e $\phi : M \rightarrow N$ função *sobrejetora* tal que respeita a operação:

$$\text{para todo } x, y \in M, \quad \phi(x \cdot_M y) = \phi(x) \cdot_N \phi(y)$$

Então ϕ é um homomorfismo.

PROVA.

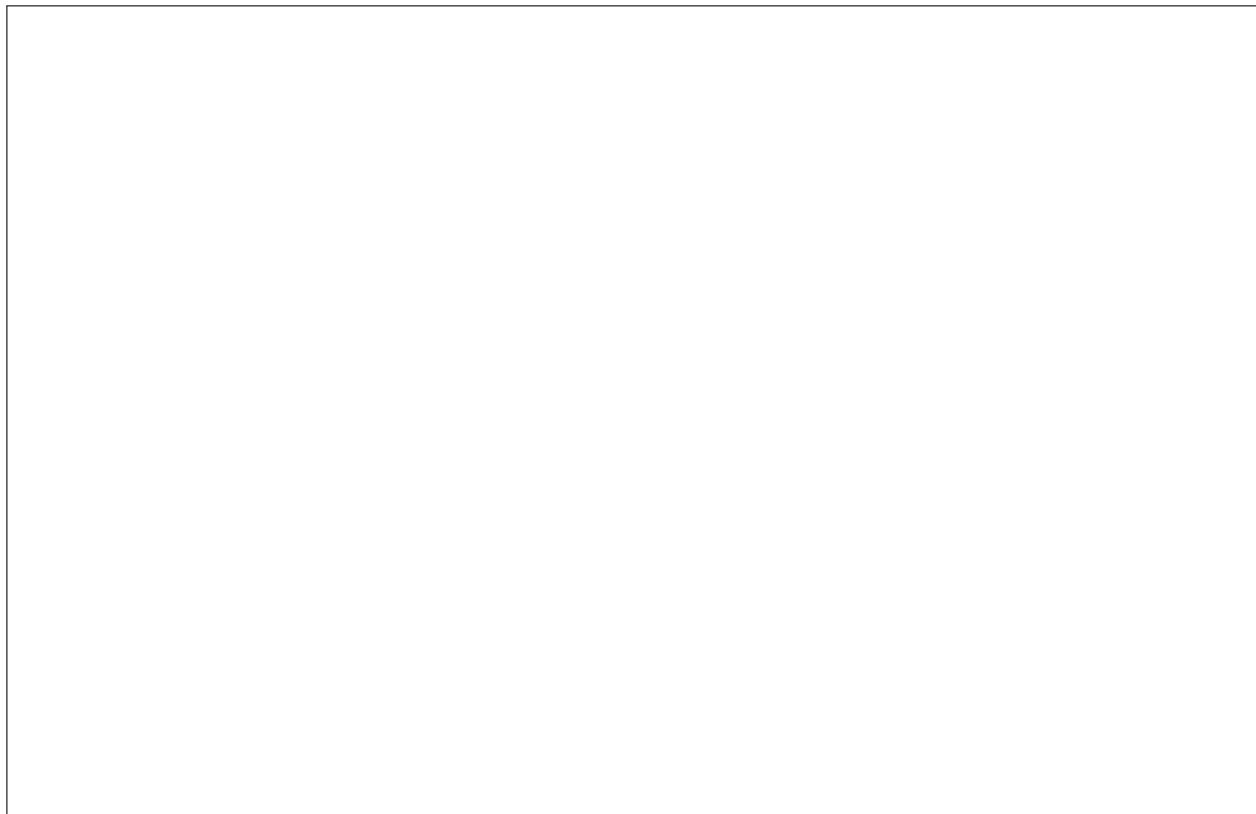


(46) **D**

Sejam A e B grupos e $\varphi : A \rightarrow B$ homomorfismo.

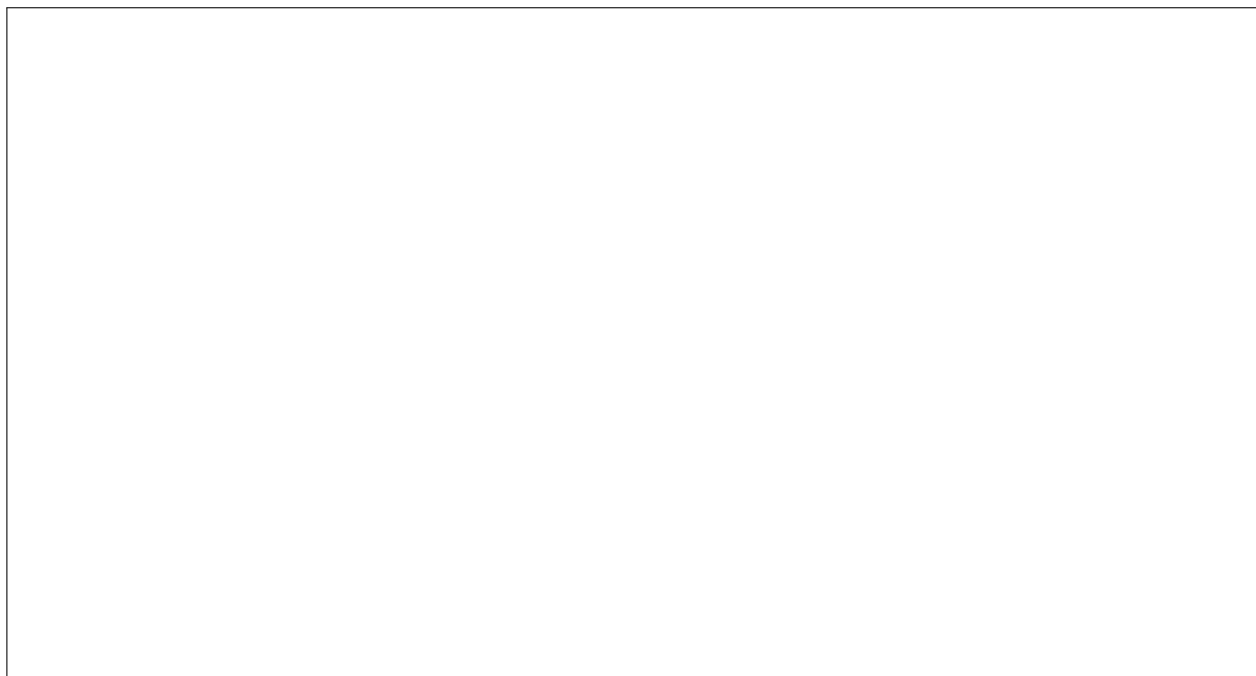
(23) **D1.** $\ker \varphi \leq A$

PROVA.



(23) **D2.** $\ker \varphi \trianglelefteq A$

PROVA.



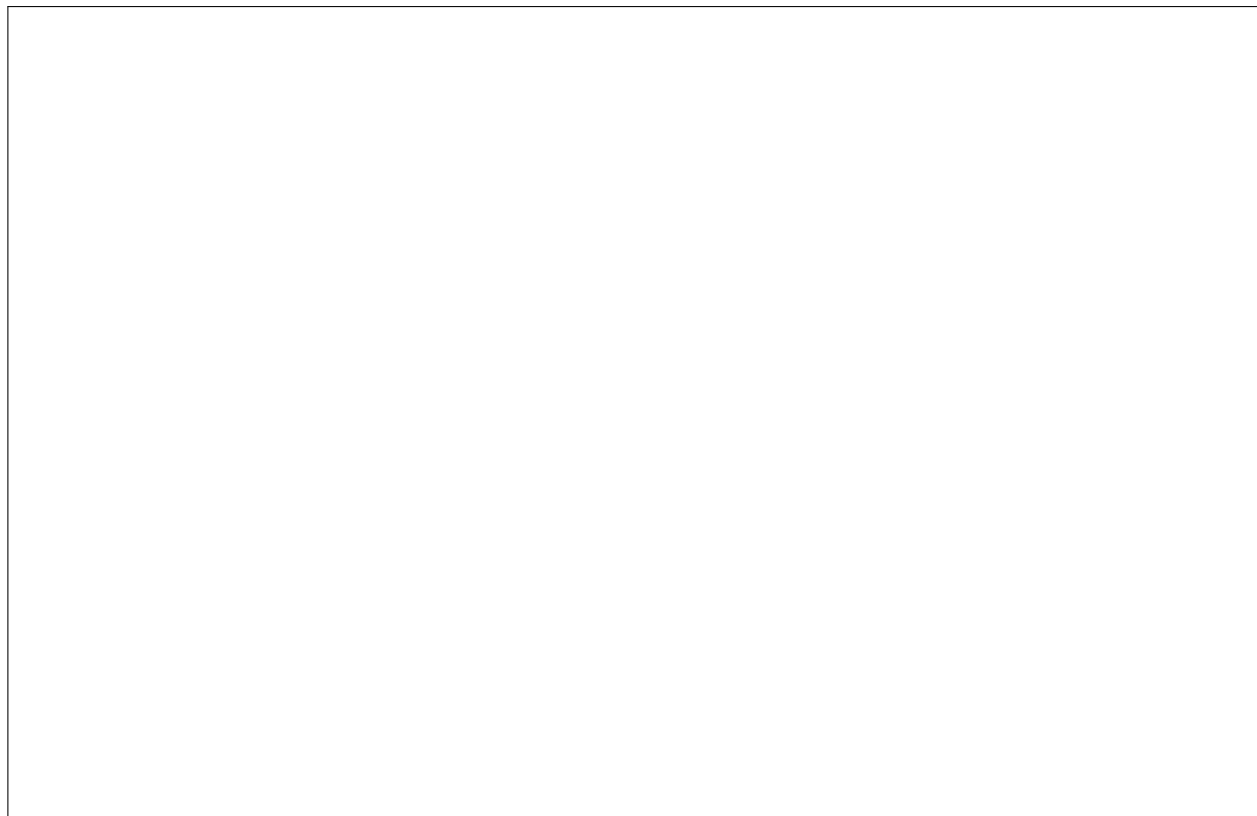
(56) **E**

Seja G grupo e $a, b \in G$ conjugados.

(32) **E1.** Para todo $n \in \mathbb{N}$, a^n e b^n também são conjugados;

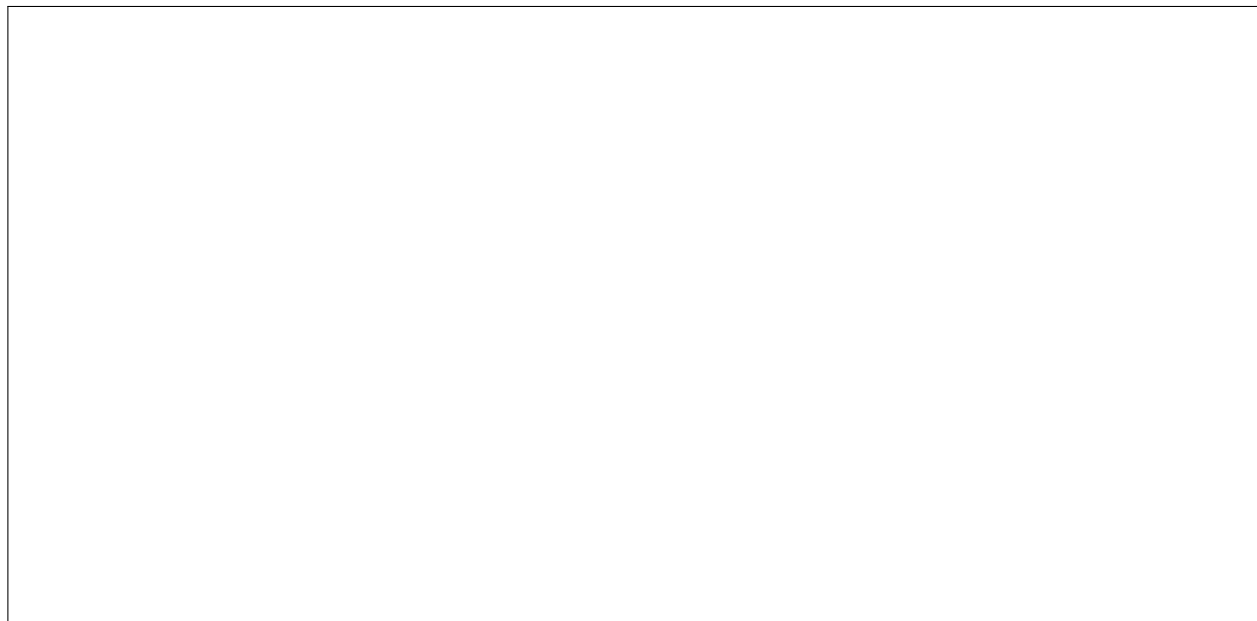
Dica: Indução.

PROVA.



(24) **E2.** $o(a) = o(b)$.

PROVA.



(100) **F**

Já provamos algo que informalmente falando podemos escrever assim:

$$\text{kernel} \implies \text{normal}$$

Formalize e prove o converso.

(16) **TEOREMA.**

(84) **PROVA.**

Só isso mesmo.

RASCUNHO

RASCUNHO

RASCUNHO

RASCUNHO