**FMC2, 2018.1**
(Turma N12 do Thanos)

**Prova 1.X**
(points: 8; bonus: $8^\flat$; time: 20')

---

**Nome:** Θάνος **Gabarito**

---

06/04/2018

## Regras:

**I.** Não vires esta página antes do começo da prova.

**II.** Nenhuma consulta de qualquer forma.

**III.** Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, etc.).[1]

**IV.** Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

**V.** $\forall x\big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

**VI.** Use caneta para tuas respostas.

**VII.** Responda dentro das caixas indicadas.

**VIII.** Escreva teu nome em cada folha de rascunho extra antes de usá-la.

**IX.** Entregue todas as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

**X.** Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

**XI.** Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

Boas provas!



[1] Ou seja, desligue antes da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

(8) # XA

(4) **XA1.** Defina formalmente a igualdade entre funções, e o operador binário $\circ$, de composição de funções.
Escreva bem todo o contexto necessário para tuas definições!

(2) DEFINIÇÃO DE $=$:

(Def. 1) Sejam $f, g : A \to B$ funções. Temos $f = g \overset{\text{def}}{\iff}$ para todo $x \in A$, $f(x) = g(x)$.

(Def. 2) Sejam $f, g$ funções. Digamos que $f = g$ sse:
(i) $\mathrm{dom} f = \mathrm{dom} g$; (ii) $\mathrm{cod} f = \mathrm{cod} g$; (iii) para todo $x \in \mathrm{dom} f$, $f(x) = g(x)$.

**Obs.:** as duas definições não são equivalentes, mas as duas respostas são aceitáveis.

(2) DEFINIÇÃO DE $\circ$:

Sejam $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Então $g \circ f : A \to C$ definida pela

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

(4) **XA2.** Usando tuas definições do **XA1**, continue o texto abaixo para provar ou refutar a afirmação: a composição é associativa.
PROVA/REFUTAÇÃO.
Sejam $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$

Primeiramente vamos verificar que as duas funções tem o mesmo domínio:

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}\,(h \circ (g \circ f)) &= \mathrm{dom}(g \circ f) && (\text{def. } h \circ (g \circ f)) \\ &= \mathrm{dom} f && (\text{def. } g \circ f) \end{aligned}$$

e do lado direito

$$\mathrm{dom}\,((h \circ g) \circ f) = \mathrm{dom} f. \qquad (\text{def. } (h \circ g) \circ f)$$

Agora precisamos mostrar que as duas funções comportam no mesmo jeito para todos os elementos no $A$. Suponha $a \in A$ então, e calcule:

$$\begin{aligned} (h \circ (g \circ f))\,(a) &= h\,((g \circ f)\,(a)) && (\text{def. } h \circ (g \circ f)) \\ &= h\,(g\,(f(a))) && (\text{def. } g \circ f) \end{aligned}$$

e o lado direito:

$$\begin{aligned} ((h \circ g) \circ f)\,(a) &= (h \circ g)\,(f(a)) && (\text{def. } (h \circ g) \circ f) \\ &= h\,(g\,(f(a))) && (\text{def. } h \circ g) \end{aligned}$$

## (8♭) XB

Sejam $A, B, C$ conjuntos. Escreva uma $\lambda$-expressão para cada um dos típos seguintes:

$\lambda$-EXPRESSÕES:

(1) $\boxed{\lambda x \,.\, \langle x, x\rangle}$ $: A \to (A \times A)$

(1) $\boxed{\lambda a, b \,.\, a}$ $: (A \times B) \to A$

(2) $\boxed{\lambda a \,.\, \lambda b \,.\, a}$ $: A \to (B \to A)$

(4) $\boxed{\lambda f \,.\, \lambda a \,.\, \lambda b \,.\, f(a, b)}$ $: ((A \times B) \to C) \to (A \to (B \to C))$

Só isso mesmo.