FMC2, 2017.2
(Turmas T34&N12 do Thanos)

Prova 3
(points: 128/100; bonus: $0^\flat$; time: 90')

Nome:

08/12/2017

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x \big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg \mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra, antes de usá-la.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

XI. Os pontos bônus serão considerados apenas para quem conseguir passar sem.[3]

Boas provas!

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

Axiomas ZF

Extensionality.

$$\forall a \forall b \, (a = b \leftrightarrow \forall x (x \in a \leftrightarrow x \in b)) \tag{ZF1}$$

Emptyset.

$$\exists e \forall x (x \notin e) \tag{ZF2}$$

Pairset.

$$\forall a \forall b \exists s \forall x \, (x \in s \leftrightarrow (x = a \lor x = b)) \tag{ZF3}$$

Separation (schema).
Para cada formula $\varphi(x)$ o seguinte:

$$\forall w \exists s \forall x \, (x \in s \leftrightarrow (x \in w \land \varphi(x))) \tag{ZF4}$$

Powerset.

$$\forall a \exists s \forall x \, (x \in s \leftrightarrow x \subseteq a) \tag{ZF5}$$

Unionset.

$$\forall a \exists s \forall x \, (x \in s \leftrightarrow \exists d (x \in d \land d \in a)) \tag{ZF6}$$

Infinity.

$$\exists i \, (\emptyset \in i \land \forall x (x \in i \to x \cup \{x\} \in i)) \tag{ZF7}$$

Lembre-se:

$$\wp A \overset{\text{def}}{=} \text{O conjunto de partes de } A$$
$$\wp_{\mathrm{f}} A \overset{\text{def}}{=} \{X \subseteq A \mid X \text{ é finito}\}$$
$$A^* \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$$
$$\overline{n} \overset{\text{def}}{=} \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\}$$
$$(A \to B) \overset{\text{def}}{=} \{f \mid f : A \to B\}$$
$$\downarrow a \overset{\text{def}}{=} \{x \in P \mid x \leq a\}$$
$$\uparrow a \overset{\text{def}}{=} \{x \in P \mid a \leq x\}$$

$$A =_{\mathrm{c}} B \overset{\text{def}}{\iff} \text{Os } A,\ B \text{ são equinúmeros}$$
$$A \leq_{\mathrm{c}} B \overset{\text{def}}{\iff} \exists C \, (C \subseteq B \ \land \ A =_{\mathrm{c}} C)$$
$$f : A \rightarrowtail B \overset{\text{def}}{\iff} f \text{ é função injetora de } A \text{ para } B$$
$$f : A \twoheadrightarrow B \overset{\text{def}}{\iff} f \text{ é função sobrejetora de } A \text{ para } B$$
$$f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow B \overset{\text{def}}{\iff} f \text{ é função bijetora de } A \text{ para } B$$
$$D \text{ downset} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall d \in D)\,(\forall x \in P)\,[\,x \leq d \implies x \in D\,]$$
$$U \text{ upset} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall u \in U)\,(\forall x \in P)\,[\,u \leq x \implies x \in U\,]$$

Definição. Um *sistema Peano* é um conjunto estruturado $\mathcal{N} = \langle \mathbf{N} \, ; \mathsf{0}, \mathsf{S} \rangle$ que satisfaz as leis:

(P1)	Zero é um número natural:	$\mathsf{0} \in \mathbf{N}$
(P2)	O sucessor é uma operação unária nos naturais:	$\mathsf{S} : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$
(P3)	Naturais diferentes tem sucessóres diferentes:	$\mathsf{S} : \mathbf{N} \rightarrowtail \mathbf{N}$
(P4)	Zero não é o sucessor de nenhum natural:	$\mathsf{0} \notin \mathsf{S}[\mathbf{N}]$
(P5)	Os naturais satisfazem o princípio da indução:	

Princípio da indução: *para todo* $X \subseteq \mathbf{N}$,

$$(\mathsf{0} \in X \land \forall n \, (n \in X \to \mathsf{S}n \in X)) \to X = \mathbf{N}.$$

Definição. Um poset $\mathcal{L} = \langle L \, ; \leq \rangle$ é um *reticulado* sse para todo $x, y \in L$ existem os $x \vee y$ e $x \wedge y$, onde

$$x \vee y \overset{\text{def}}{=} \sup \{x, y\} \qquad\qquad x \wedge y \overset{\text{def}}{=} \inf \{x, y\}$$

(24) **A**

Sejam conjuntos A, A', B, B', C tais que $A =_{\mathrm{c}} A'$ e $B =_{\mathrm{c}} B'$.
Prove **exatamente uma** das 4 afirmações:

(8) (i) $A \times B =_{\mathrm{c}} A' \times B'$

(14) (ii) $\wp A =_{\mathrm{c}} \wp A'$

(18) (iii) $(A \to B) =_{\mathrm{c}} (A' \to B')$

(24) (iv) $((A \times B) \to C) =_{\mathrm{c}} (A \to (B \to C))$

Dica: Não use o *Schröder–Bernstein.*

Prova.

(32) **B**

Considere o axioma seguinte:

$$\forall h \forall t \exists s \forall x \big(x \in s \leftrightarrow x = h \lor x \in t \big). \tag{ZF3*}$$

(16) **B1.** No sistema ZF1+ZF2+ZF3*, prove o ZF3 como teorema.
Prova.

(16) **B2.** Mostre que não tem como provar o ZF3* no sistema ZF1+ZF2+ZF3.
Demonstração.

(36) C

Para qualquer sistema Peano $\mathcal{N} = \langle \mathbf{N} \; ; \mathsf{0}, \mathsf{S} \rangle$, definimos as operações:

$$n + \mathsf{0} = n \tag{a1}$$
$$n + \mathsf{S}m = \mathsf{S}(n + m) \tag{a2}$$
$$n \cdot \mathsf{0} = \mathsf{0} \tag{m1}$$
$$n \cdot \mathsf{S}m = (n \cdot m) + n \tag{m2}$$

Sejam dois sistemas Peano $\mathcal{N}_1 = \langle \mathbf{N}_1 \; ; \mathsf{0}_1, \mathsf{S}_1 \rangle$ e $\mathcal{N}_2 = \langle \mathbf{N}_2 \; ; \mathsf{0}_2, \mathsf{S}_2 \rangle$, e suas operações de adição $+_1$ e $+_2$. Seja $\varphi : \mathbf{N}_1 \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbf{N}_2$ o isomorfismo definido recursivamente pelas

$$\varphi(\mathsf{0}_1) = \mathsf{0}_2 \tag{φ1}$$
$$\varphi(\mathsf{S}_1 n) = \mathsf{S}_2(\varphi(n)). \tag{φ2}$$

(18) **C1.** Prove que φ é sobrejetora.

Dica: *Mostre que* $\varphi[\mathbf{N}_1] = \mathbf{N}_2$.

PROVA.

(18) **C2.** Prove que φ respeita a adição, ou seja, para todos $m, n \in \mathbf{N}_1$,

$$\varphi(n +_1 m) = \varphi(n) +_2 \varphi(m).$$

PROVA.

(36) **D**

Sejam P um poset, $x, y \in P$. Prove que as afirmações

(i) $x \leq y$;

(ii) $\downarrow x \subseteq \downarrow y$;

(iii) para todo downset D de P com $y \in D$, temos $x \in D$.

são equivalentes. Em cada parte escreva claramente qual das implicações tu tá provando.
PROVA.

Só isso mesmo.

Rascunho

Rascunho

Rascunho

Rascunho