

---

Nome:

---

08/11/2017

### Regras:

- I. Não vires esta página antes do começo da prova.
- II. Nenhuma consulta de qualquer forma.
- III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).<sup>1</sup>
- IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.
- V.  $\forall x(\text{Colar}(x) \rightarrow \neg \text{Passar}(x, \text{FMC2}))$ .<sup>2</sup>
- VI. Use caneta para tuas respostas.
- VII. Responda dentro das caixas indicadas.
- VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra, antes de usá-la.
- IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.
- X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.
- XI. Os pontos bônus serão considerados apenas para quem conseguir passar sem.<sup>3</sup>
- XII. Escolha até 3 dos A, B, C, D, E para resolver.<sup>4</sup>

*Boas provas!*

---

<sup>1</sup>Ou seja, *desligue antes* da prova.

<sup>2</sup>Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

<sup>3</sup>Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

<sup>4</sup>Provas com respostas em mais que 3 partes não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

## Lembre-se:

**Definição 1 (grupo; grupo abeliano; monóide).** Um conjunto estruturado  $\mathcal{G} = \langle G ; e, * \rangle$  é um *grupo* sse:

$$(\forall a, b \in G) [a * b \in G] \quad (\text{G0})$$

$$(\forall a, b, c \in G) [a * (b * c) = (a * b) * c] \quad (\text{G1})$$

$$(\forall a \in G) [e * a = a = a * e] \quad (\text{G2})$$

$$(\forall a \in G) (\exists y \in G) [y * a = e = a * y] \quad (\text{G3})$$

Se  $\mathcal{G}$  satisfaz as (G0)–(G3) em cima e a

$$(\forall a, b \in G) [a * b = b * a] \quad (\text{G4})$$

chamamos o  $\mathcal{G}$  *grupo abeliano*. Denotamos o inverso de  $a \in G$  garantido pela (G3) com  $a^{-1}$  ou  $(-a)$ , dependendo se usamos notação multiplicativa ou aditiva para o grupo. Se o  $\mathcal{G}$  satisfaz as (G0)–(G2) ele é um *monóide*.

**Definição 2 (anel).** Um conjunto estruturado  $\mathcal{R} = \langle R ; 0, 1, +, \cdot \rangle$  é um *anel* (com identidade) sse:

$$(\forall x, y \in R) [x + y \in R] \quad (\text{A0})$$

$$(\forall x, y, z \in R) [x + (y + z) = (x + y) + z] \quad (\text{A1})$$

$$(\forall x \in R) [0 + x = x = x + 0] \quad (\text{A2})$$

$$(\forall x \in R) (\exists y \in R) [y + x = 0 = x + y] \quad (\text{A3})$$

$$(\forall x, y \in R) [x + y = y + x] \quad (\text{A4})$$

$$(\forall x, y \in R) [x \cdot y \in R] \quad (\text{M0})$$

$$(\forall x, y, z \in R) [x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z] \quad (\text{M1})$$

$$(\forall x \in R) [1 \cdot x = x = x \cdot 1] \quad (\text{M2})$$

$$(\forall x, y, z \in R) [x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z] \quad (\text{DL})$$

$$(\forall x, y, z \in R) [(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x] \quad (\text{DR})$$

Denotamos o inverso de  $x \in R$  garantido pela (A3) com  $(-x)$ . Se a  $\cdot$  é comutativa, chamamos o  $\mathcal{R}$  *anel comutativo*.

**Definição 3.** Sejam  $G$  grupo  $g \in G$ , e  $A, B \subseteq G$ . Definimos

$$gA \stackrel{\text{def}}{=} \{ga \mid a \in A\} \quad AB \stackrel{\text{def}}{=} \{ab \mid a \in A, b \in B\} \quad \dots \text{etc.}$$

**Definição 4 (homomorfismo de grupo).** Um *homomorfismo*  $\varphi$  do grupo  $\langle A ; e_A, \cdot_A \rangle$  para o grupo  $\langle B ; e_B, \cdot_B \rangle$  é uma função  $\varphi : A \rightarrow B$  tal que:

(i) para todo  $x, y \in A$ ,  $\varphi(x \cdot_A y) = \varphi(x) \cdot_B \varphi(y)$ ;

(ii)  $\varphi(e_A) = e_B$ ;

(iii) para todo  $x \in A$ ,  $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$ .

**Definição 5 (subgrupo normal).** Um subgrupo  $N \leq G$  é *subgrupo normal* de  $G$  sse

$$\begin{aligned} N \trianglelefteq G &\stackrel{\text{def}}{\iff} \text{para todo } g \in G \text{ e } n \in N, \quad gng^{-1} \in N \\ &\iff \text{para todo } g \in G, \quad gN = Ng \end{aligned}$$

(18) **A**

**Definition I (domínio de integridade).** Um anel comutativo  $D$  tal que

$$\text{para todo } x, y \in D, \text{ se } xy = 0 \text{ então } x = 0 \text{ ou } y = 0 \quad (\text{NZD})$$

é chamado *domínio de integridade*.

**Definition II (domínio de cancelamento).** Um anel comutativo  $D$  tal que

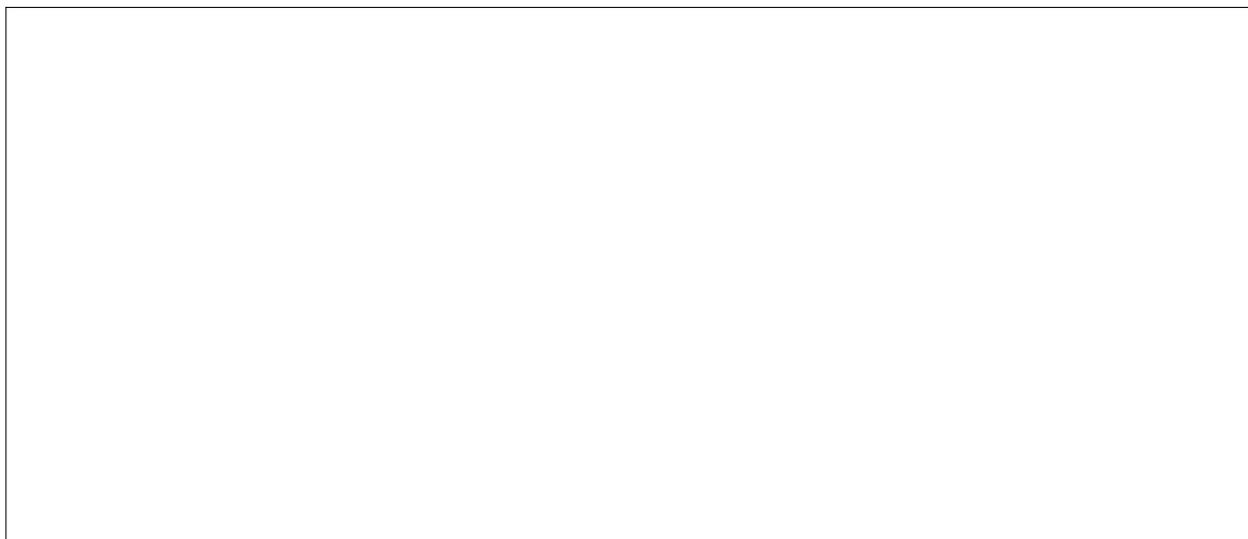
$$\text{para todo } a, x, y \in D, \text{ } ax = ay \text{ \& } a \neq 0 \implies x = y \quad (\text{CL})$$

é chamado *domínio de cancelamento*.

**Proposição.** As definições I e II são equivalentes, ou seja:

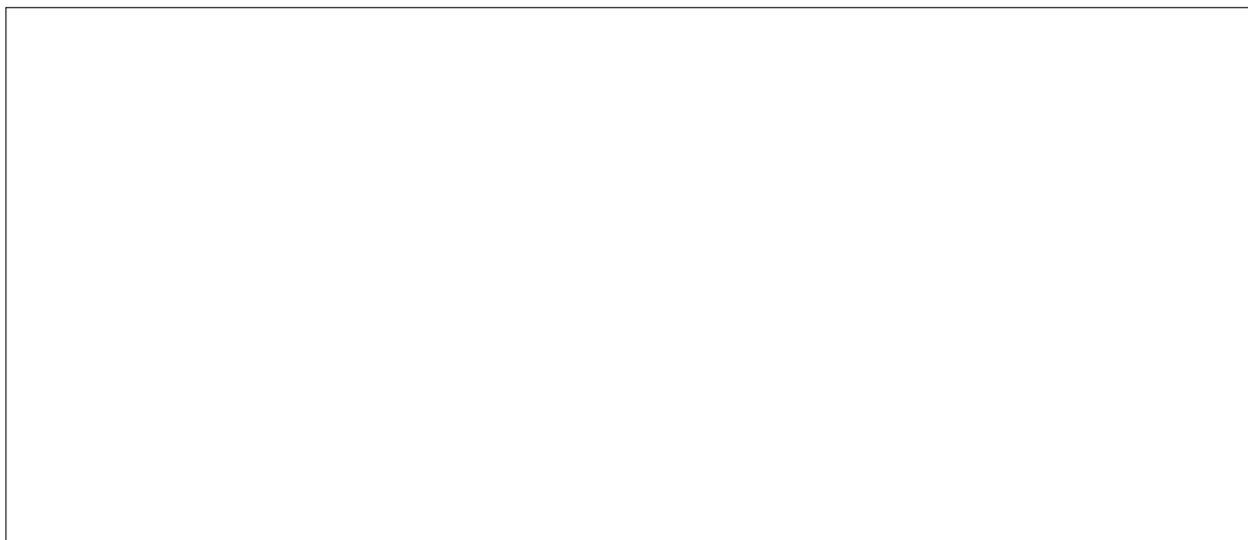
(9) **A1.**  $D$  é um domínio de integridade  $\implies D$  é um domínio de cancelamento.

PROVA.



(9) **A2.**  $D$  é um domínio de integridade  $\iff D$  é um domínio de cancelamento.

PROVA.



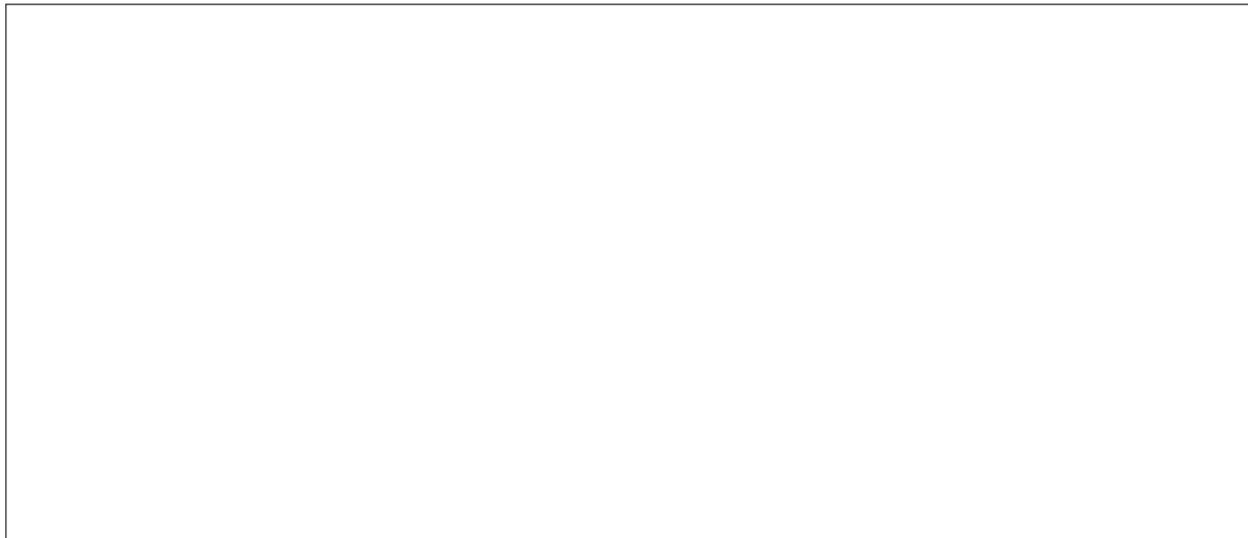
(32) **B**

(12) **B1.** Seja  $G$  grupo tal que:

$$\text{para todo } a, b \in G, (ab)^2 = a^2b^2.$$

Prove que  $G$  é abeliano.

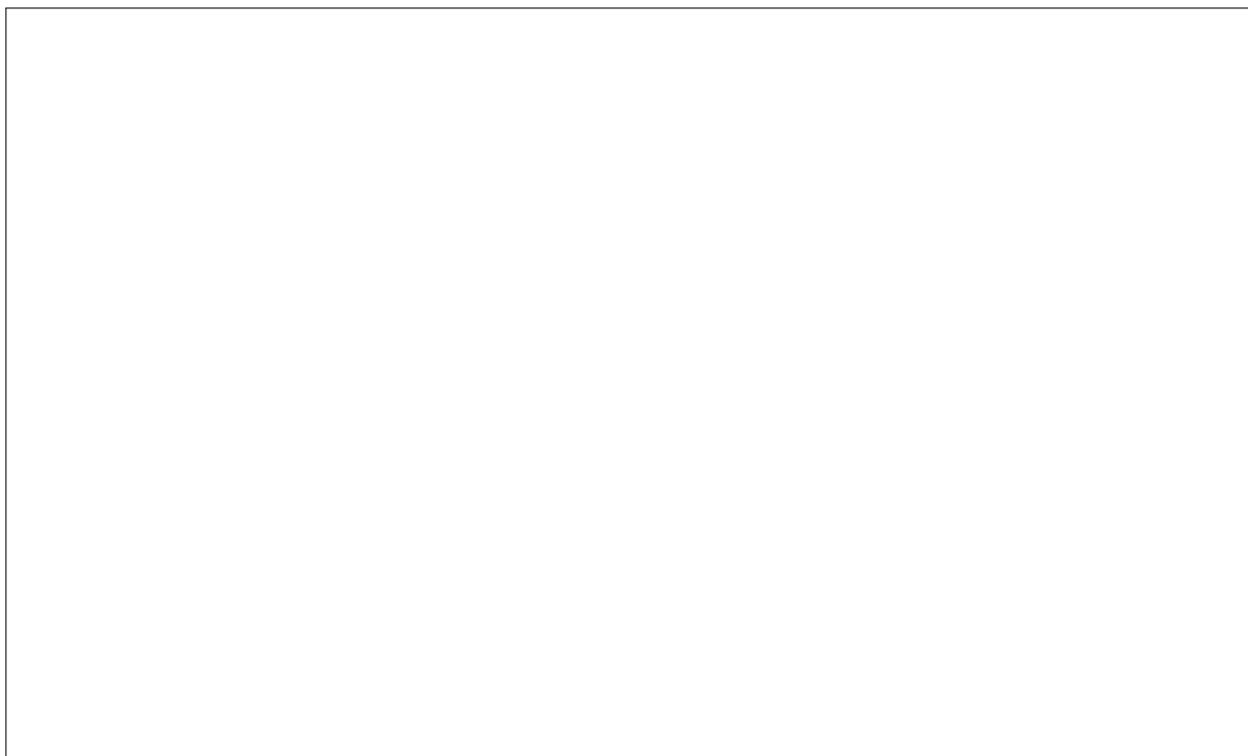
PROVA.



(20) **B2.** Seja  $G$  grupo abeliano. Prove por indução que para todo  $n \in \mathbb{N}$ , e todos os  $a, b \in G$ , temos:

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

PROVA.



(32) **C**

**Cr terion.** Sejam  $\mathcal{G} = (G; \cdot_G, e_G)$ ,  $\mathcal{H} = (H; \cdot_H, e_H)$  grupos e  $\varphi : G \rightarrow H$  tal que

$$\varphi(x \cdot_G y) = \varphi(x) \cdot_H \varphi(y) \quad \text{para todo } x, y \in G.$$

A  $\varphi$    um homomorfismo de grupos.

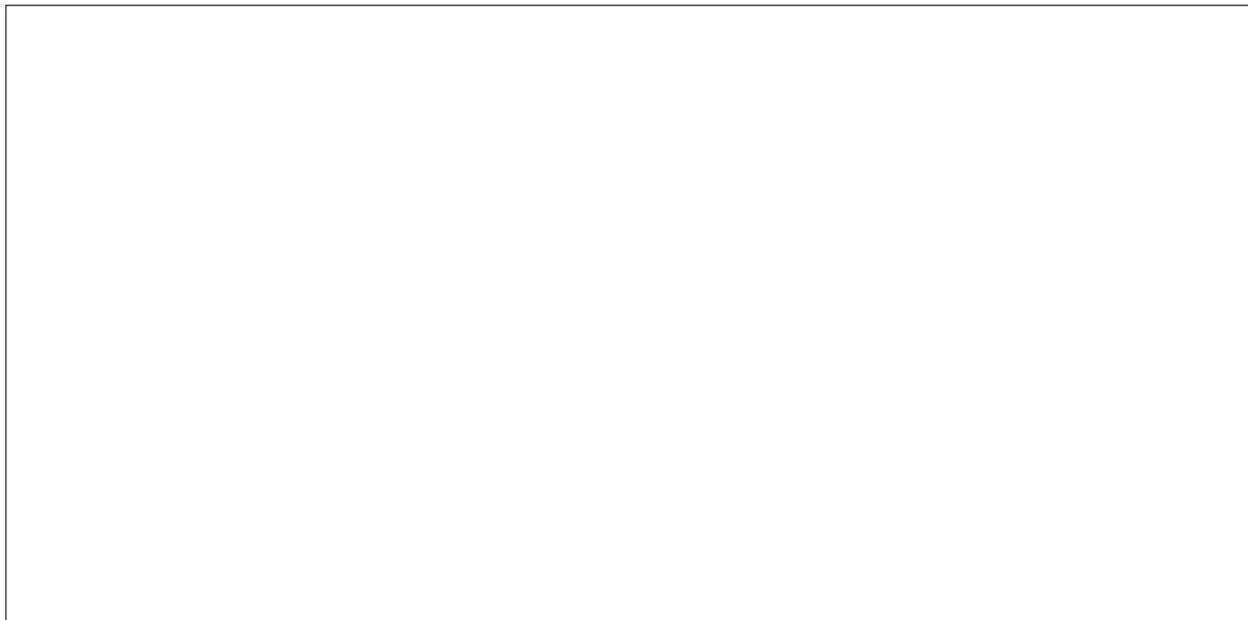
PROVA.

(24) **D**

(12) **D1.** Sejam  $\mathcal{G}$  grupo e  $H \leq G$ . Prove que para todo  $a \in G$ ,  $aHa^{-1} \leq G$ , onde lembramos que

$$aHa^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{aha^{-1} \mid h \in H\}.$$

PROVA.

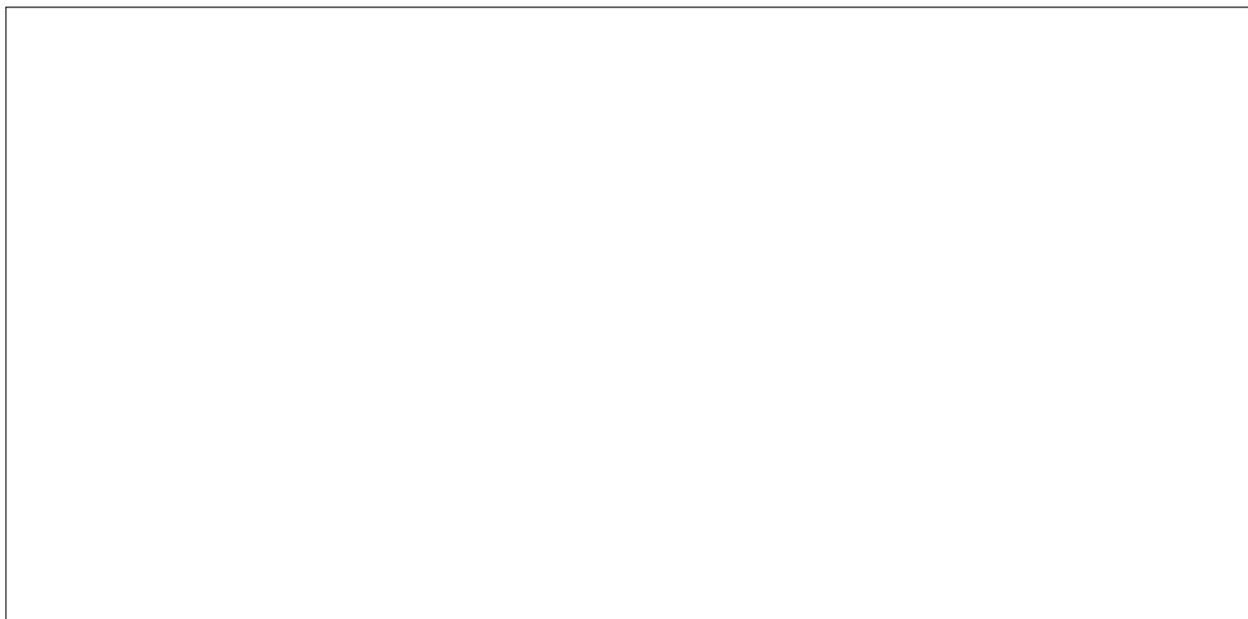


(12) **D2.** Sejam  $\mathcal{G}$  grupo e  $g \in G$ . Defina a função  $\varphi_g : G \rightarrow G$  pela

$$\varphi_g(x) = gxg^{-1}.$$

Prove que  $\varphi_g$  é um isomorfismo (e logo um automorfismo).

PROVA.



(48) **E**

Sejam  $G$  grupo e  $N \trianglelefteq G$ .

(12) **E1.** Defina o grupo quociente  $G/N$ .

DEFINIÇÃO.

(36) **E2.** Proves que  $G/N$  realmente é um grupo.

PROVA.

Só isso mesmo.

## RASCUNHO

## RASCUNHO

## RASCUNHO

## RASCUNHO

## RASCUNHO

## RASCUNHO