FMC2, 2017.2
(Turmas do Thanos)

Provinha 0
(points: 0; bonus: $0^\flat$; time: 70')

Alun$*$:

Alun$*$-prof:

26/07/2017

(Resolva todos os problemas.)

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) do que significa que "o número real x é *irracional*". Não assume que o leitor já saiba a palavra "*racional*".

DEFINIÇÃO.

Um número real x é *irracional* sse não existem inteiros p, q tais que $x = p/q$.

A2. Usando uma fórmula, expresse o significado da frase *"o x é racional"*.
Considere como universo o $\mathbb{R}$ e seus subconjuntos. Alem dos símbolos "padrão" de lógica, podes usar **apenas** os símbolos: $0, 1, 2, +, >, \cdot, \in, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

FÓRMULA: $\exists p \exists q \, [\, p \in \mathbb{Z} \land q \in \mathbb{Z} \land \neg(q = 0) \land x \cdot q = p \,]$

B

Considere as 52 cartas de algum baralho.

B1. De quantas maneiras podemos escolher 4 delas? (A ordem não importa.)

RESPOSTA: $C(52, 4) = 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49/4! \ \Big(= 13 \cdot 17 \cdot 25 \cdot 49 \Big)$

B2. Quantas delas são feitas por cartas da mesma cor?

RESPOSTA: $2 \cdot C(26, 4) = 2 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23/4! \ \Big(= 2 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 23 \Big)$

C

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

(i) $a \mid -a$;

(ii) $a \mid b \ \& \ b \mid c \implies a \mid c$.

PROVA.

(i) Como $a \cdot (-1) = -a$ e $-1 \in \mathbb{Z}$, temos $a \mid -a$.
(ii) Suponha que $a \mid b$ e $b \mid c$. Logo, temos $au = b$ e $bv = c$ para alguns $u, v \in \mathbb{Z}$. Precisamos mostrar que $a \mid c$. Realmente temos

$$\begin{aligned} c &= bv \\ &= (au)v \\ &= a(uv) \end{aligned}$$

que mostra que $a \mid c$, porque $uv \in \mathbb{Z}$.

D

D1 Para quais valores de $n \in \mathbb{Z}$ o $n^2 - 1$ é primo?
RESPOSTA & PROVA.

Temos $n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$. Para ser primo, pela definição, um dos dois fatores tem que ser 1 ou -1. Se $n + 1 = 1$ ou $n - 1 = -1$, temos $n = 0$, impossível pois então $n^2 - 1 = 0 - 1 = -1$ que não é primo. Se $n + 1 = -1$ ou $n - 1 = 1$, temos $n = -2$ ou $n = 2$ (respectivamente), e nesse caso $n^2 - 1 = 3$ que é primo.

Logo, apenas para os valores $n = \pm 2$ o $n^2 - 1$ é primo.

D2 Prove ou refuta a afirmação: *para todo* $x, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{m} \\ x &\equiv 1 \pmod{n} \end{aligned}\right\} \implies x \equiv 1 \pmod{mn}$$

PROVA OU REFUTAÇÃO.

Falso. Contraexemplo: tome $x = 5$, $m = 2$, $n = 4$.

$$\text{Temos} \quad \left\{\begin{aligned} 5 &\equiv 1 \pmod{4} \\ 5 &\equiv 1 \pmod{2} \end{aligned}\right\} \quad \text{mas} \quad 5 \not\equiv 1 \pmod{8}.$$

I

Os *números Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \end{aligned}$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1. \tag{$*$}$$

PROVA.

Vou provar o teorema por indução no n.

Para $n = 0$ (base da indução), preciso verificar que os dois lados da ($*$) são iguais. Realmente são:

$$\sum_{i=0}^{0} F_i = F_0 = 0$$
$$F_{0+2} - 1 = F_2 - 1 = (F_1 + F_0) - 1 = (1 + 0) - 1 = 0.$$

Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=0}^{k} F_i = F_{k+2} - 1. \tag{H.I.}$$

Preciso provar que

$$\sum_{i=0}^{k+1} F_i = F_{(k+1)+2} - 1.$$

Realmente

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k+1} F_i &= \Big(\sum_{i=0}^{k} F_i\Big) + F_{k+1} && \text{(def. de somatório)} \\ &= (F_{k+2} - 1) + F_{k+1} && \text{(H.I.)} \\ &= (F_{k+2} + F_{k+1}) - 1 && \text{(associatividade e comutatividade de +)} \\ &= F_{k+3} - 1. && \text{(def. de } F_n\text{),} \end{aligned}$$

J

J1. Para cada um dos inteiros 36, 3, 1, e 0, escreve ele como produtório de prímos se é possível; senão, explique o porquê.

RESPOSTA.

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$.
3 é um produtório de primos, de tamanho 1! (Podemos escrever $3 = \prod_{i=1}^{1} 3$.)
1 é um produtório (de primos!) de tamanho 0, o produtório vazio! (Podemos escrever $1 = \prod_{i=1}^{0} 3$.)
Mas o inteiro 0 não pode ser escrito como produtório de primos, porque um produtório é igual 0 sse pelo menos um termo dele é o 0; e o 0 não é primo.

J2. Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

***Dica:** Princípio da indução finita forte (PIFF), ou princípio da boa ordem (PBO).*

PROVA.

Prova usando o PIFF: Caso que n seja primo, trivialmente ele mesmo é um produtório de primos (um produtório de tamanho 1).

Caso contrário, $n = ab$, para alguns $a, b \in \mathbb{N}$ com $1 < a < n$ e $1 < b < n$, logo podemos assumir (hipotese indutiva) que cada um deles pode ser escrito na forma desejada:

$$a = p_1 p_2 \cdots p_{k_a}, \qquad \text{para alguns } p_i\text{'s primos;}$$
$$b = q_1 q_2 \cdots q_{k_b}, \qquad \text{para alguns } q_j\text{'s primos.}$$

Então temos $n = ab = (p_1 p_2 \cdots p_{k_a})(q_1 q_2 \cdots q_{k_a}) = p_1 p_2 \cdots p_{k_a} q_1 q_2 \cdots q_{k_b}$,
que realmente é um produtório de primos.

Prova usando o POB: Considere o conjunto C de todos os inteiros $n > 1$ que *não* podem ser escritos como produtório de primos. Queremos mostrar que $C = \emptyset$.

Para chegar num absurdo, suponha que C tem elementos e (pelo PBO) seja $m = \min C$ o menor deles, ou seja, m é o menor natural que não pode ser escrito como produtório de primos. Então m com certeza não é primo: se fosse primo, ele mesmo seria um produtório de primos (de tamanho 1).

Logo, $m = ab$ para alguns $a, b \in \mathbb{N}$ com $1 < a < m$ e $1 < b < m$. Como m foi o menor natural que não pode ser escrito como produtório de primos, e ambos os naturais a e b são menores de m, então ambos podem ser escritos como produtórios de primos:

$$a = p_1 p_2 \cdots p_{k_a}, \qquad \text{para alguns } p_i\text{'s primos;}$$
$$b = q_1 q_2 \cdots q_{k_b}, \qquad \text{para alguns } q_j\text{'s primos.}$$

Agora conseguimos escrever o m como produtório de primos:

$$m = ab = (p_1 p_2 \cdots p_{k_a})(q_1 q_2 \cdots q_{k_a}) = p_1 p_2 \cdots p_{k_a} q_1 q_2 \cdots q_{k_b},$$

contradizendo sua definição. Chegando nesse absurdo podemos concluir que realmente $C = \emptyset$, que foi o que queriamos provar.