FMC2, 2017.1
(Turmas T56+N12 do Thanos)

Prova 4
(points: 156/100; bonus: $0^\flat$; time: 120')

Nome:

30/06/2017

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra, antes de usá-la.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

XI. Os pontos bônus serão considerados apenas para quem conseguir passar sem.[3]

XII. **Escolha até 3 dos $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ para resolver.**[4]

XIII. **Para quem já passou FMC2:**
Seja p o número dos teus pontos desta prova.
Então $(p - 100) \vee 0$ pontos serão distribuidos nas tuas três notas existentes.

Para quem não passou FMC2:
A nota desta prova vai substituir tua pior das provas existentes.

Boas provas!

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.
[4] Provas com respostas em mais que o permitido não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

Axiomas ZF

Extensionality.

$$\forall a \forall b \, (a = b \leftrightarrow \forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b)) \tag{ZF1}$$

Emptyset.

$$\exists e \forall x(x \notin e) \tag{ZF2}$$

Pairset.

$$\forall a \forall b \exists s \forall x \, (x \in s \leftrightarrow (x = a \vee x = b)) \tag{ZF3}$$

Separation (schema).
Para cada formula $\varphi(x)$ o seguinte:

$$\forall w \exists s \forall x \, (x \in s \leftrightarrow (x \in w \wedge \varphi(x))) \tag{ZF4}$$

Powerset.

$$\forall a \exists s \forall x \, (x \in s \leftrightarrow x \subseteq a) \tag{ZF5}$$

Unionset.

$$\forall a \exists s \forall x \, (x \in s \leftrightarrow \exists d(x \in d \wedge d \in a)) \tag{ZF6}$$

Infinity.

$$\exists i \, (\emptyset \in i \wedge \forall x(x \in i \rightarrow x \cup \{x\} \in i)) \tag{ZF7}$$

Replacement (schema).
Para cada class-function $\Phi(x)$ o seguinte:
Para todo conjunto a, a classe

$$\{\Phi(x) \mid x \in a\} \tag{ZF8}$$

é um conjunto.

Foundation.

$$(\forall a \neq \emptyset)(\exists d \in a)[d \cap a = \emptyset] \tag{ZF9}$$

Lembre-se:

Definição 1. Um conjunto estruturado $\mathcal{G} = \langle G \,;\, e, * \rangle$ é um *grupo* sse:

$$(\forall a, b \in G) \, [\, a * b \in G \,] \tag{G0}$$

$$(\forall a, b, c \in G) \, [\, a * (b * c) = (a * b) * c \,] \tag{G1}$$

$$(\forall a \in G) \, [\, e * a = a = a * e \,] \tag{G2}$$

$$(\forall a \in G) \, (\exists a' \in G) \, [\, a' * a = e = a * a' \,] \tag{G3}$$

Denotamos o inverso de $a \in G$ garantido pela (G3) com a^{-1} ou $(-a)$, dependendo se usamos notação multiplicativa ou aditiva para o grupo.

Definição 2. Um subgrupo $N \leq G$ é *subgrupo normal* de G sse

$$N \trianglelefteq G \quad \begin{array}{l} \overset{\text{def}}{\iff} \text{ para todo } g \in G \text{ e } n \in N, \; gng^{-1} \in N \\ \overset{\text{def}}{\iff} \text{ para todo } g \in G, \; gN = Ng \end{array}$$

Definição 3. Um poset não vazio $\mathcal{L} = \langle L \,;\, \leq \rangle$ é um *reticulado* sse para todo $x, y \in L$ existem os $x \vee y$ e $x \wedge y$, onde

$$x \vee y \overset{\text{def}}{=} \sup \{x, y\} \qquad\qquad x \wedge y \overset{\text{def}}{=} \inf \{x, y\}$$

Definição 4. Um poset não vazio $\mathcal{L} = \langle L \,;\, \leq \rangle$ é um *reticulado completo* sse $\bigvee S$ e $\bigwedge S$ existem para todo $S \subseteq L$.

(52) **A**

Seja $\langle P\,;\leq\rangle$ um poset. Denotamos com P^∂ o poset $\langle P\,;\geq\rangle$.

(12) **A1.** Defina um $\varphi : \mathcal{O}(P) \cong \mathcal{O}\big(P^\partial\big)$.
DEFINIÇÃO.

(16) **A2.** Defina um $\psi : \mathcal{O}(P_1 \uplus P_2) \cong \mathcal{O}(P_1) \times \mathcal{O}(P_2)$.
DEFINIÇÃO.

(24) **A3.** O que podes concluir sobre os ordinais α e β se...:

(i) $\omega + \alpha = \omega$

(ii) $\alpha + \omega = \omega$

(iii) $\omega \cdot \alpha = \omega$

(iv) $\alpha \cdot \omega = \omega$

(v) $\alpha + \beta = \omega$

(vi) $\alpha \cdot \beta = \omega$

CONCLUSÕES.

(52) **B**

(24) **B1.** Prove que não existe uma cadeia infinita $\in$-descendente

$$x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \cdots \ni x_n \ni x_{n+1} \ni \cdots$$

PROVA.

(28) **B2.** Mostre que podemos tirar o Pairset (ZF3) da ZF "sem perder nada". Ou seja, dado objetos a, b, mostre que existe o conjunto $\{a, b\}$ que consiste em exatamente esses objetos.
PROVA.

(52) **C**

Um $A \subseteq \mathbb{N}$ é *cofinito* sse $\mathbb{N} \setminus A$ é finito.

(12) **C1.** Mostre que a família $\mathscr{L}_1 \coloneqq \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ é cofinito}\}$ é um reticulado de conjuntos.
PROVA.

(16) **C2.** Mostre que a família $\mathscr{L}_2 \coloneqq \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ é finito ou cofinito}\}$ também é.
PROVA.

(24) **C3.** Seja $A_n \coloneqq \mathbb{N} \setminus \{0, 2, \ldots, 2n-2\}$ o $\mathbb{N}$ sem os primeiros n números pares. Mostre que:

$$\textit{se } B \subseteq A_n \textit{ para todo } n \in \mathbb{N}, \textit{ então } B \textit{ não é cofinito.}$$

Deduza que nem $\mathscr{L}_1$ nem $\mathscr{L}_2$ são completos.
PROVA.

(52) **D**

(12) **D1.** Se $H \leq G$ de indice 2, então $H \trianglelefteq G$.
PROVA.

(16) **D2.** Se $H \leq G$ e $N \trianglelefteq G$, então $H \cap N \trianglelefteq H$.
PROVA.

(24) **D3.** Seja $H \leq G$. Defina $a \sim b \overset{\text{def}}{\iff} ab^{-1} \in H$.

(12) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência.

PROVAS.

(12) Sejam $a, b \in G$. Prove que:

(i) $a \in H, b \in H \implies a \sim b$

(ii) $a \in H, b \notin H \implies a \not\sim b$

(iii) $a \notin H, b \notin H \;\not\Longrightarrow\; a \sim b$

(iv) $a \notin H, b \notin H \;\not\Longrightarrow\; a \not\sim b$

PROVAS.

Só isso mesmo.

Rascunho

Rascunho

Rascunho

RASCUNHO

Rascunho

Rascunho