

---

Nome:

---

08/05/2017

**Regras:**

- I. Não vires esta página antes do começo da prova.
- II. Nenhuma consulta de qualquer forma.
- III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).<sup>1</sup>
- IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.
- V.  $\forall x(\text{Colar}(x) \rightarrow \neg \text{Passar}(x, \text{FMC2}))$ .<sup>2</sup>
- VI. Use caneta para tuas respostas.
- VII. Responda dentro das caixas indicadas.
- VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra, antes de usá-la.
- IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.
- X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.
- XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.<sup>3</sup>
- XII. Escolha até 3 dos A, B, C, D para responder.<sup>4</sup>

**Lembre-se:**

$\mathcal{P}A \stackrel{\text{def}}{=} \text{O conjunto de partes de } A$	$A =_c B \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{Os } A, B \text{ são equinúmeros}$
$\mathcal{P}_f A \stackrel{\text{def}}{=} \{X \subseteq A \mid X \text{ é finito}\}$	$A \leq_c B \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists C (C \subseteq B \wedge A =_c C)$
$A^* \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$	$f : A \rightarrow B \stackrel{\text{def}}{\iff} f \text{ é função injetora de } A \text{ para } B$
$\bar{n} \stackrel{\text{def}}{=} \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\}$	$f : A \twoheadrightarrow B \stackrel{\text{def}}{\iff} f \text{ é função sobrejetora de } A \text{ para } B$
$(A \rightarrow B) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \mid f : A \rightarrow B\}$	$f : A \xrightarrow{c} B \stackrel{\text{def}}{\iff} f \text{ é função bijetora de } A \text{ para } B$

Podes usar as seguintes equinumerosidades sem as provar:

$$\mathbb{N} =_c \mathbb{Z} =_c \mathbb{Q} =_c \mathcal{P}_f \mathbb{N} =_c \mathbb{N}^2 =_c \mathbb{N}^*$$
$$\mathbb{R} =_c \mathbb{R}^2 =_c (0, 1) =_c [0, 1] =_c [0, 1) =_c (0, 1] =_c \mathcal{P}\mathbb{N} =_c (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) =_c (\mathbb{N} \rightarrow \bar{2})$$

*Boas provas!*

---

<sup>1</sup>Ou seja, *desligue antes* da prova.

<sup>2</sup>Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

<sup>3</sup>Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

<sup>4</sup>Provas com respostas nas 4 partes não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(24) **A**

(8) **A1.** Seja  $\sim$  uma relação de equivalência num conjunto  $A$ , e seja  $a \in A$ . Defina a classe de equivalência  $[a/\sim]$  e o conjunto quociente  $A/\sim$ .

DEFINIÇÕES.

$[a/\sim]$

$A/\sim$

(16) **A2.** Prove que:

$$A \leq_c B \iff (\exists f)[f : A \twoheadrightarrow B]$$

PROVA.

(24) **B**

(12) **B1.** Para qualquer conjunto  $A$  definimos

$$\mathcal{P}_\infty A \stackrel{\text{def}}{=} \{C \subseteq A \mid C \text{ infinito}\}.$$

Qual a cardinalidade do  $\mathcal{P}_\infty \mathbb{N}$ ?

RESPOSTA & PROVA.

(12) **B2.** Sejam  $A$ ,  $B$ , e  $C$  conjuntos. Sem usar o teorema Schröder–Bernstein, prove que:

$$(A \rightarrow (B \times C)) =_c (A \rightarrow B) \times (A \rightarrow C)$$

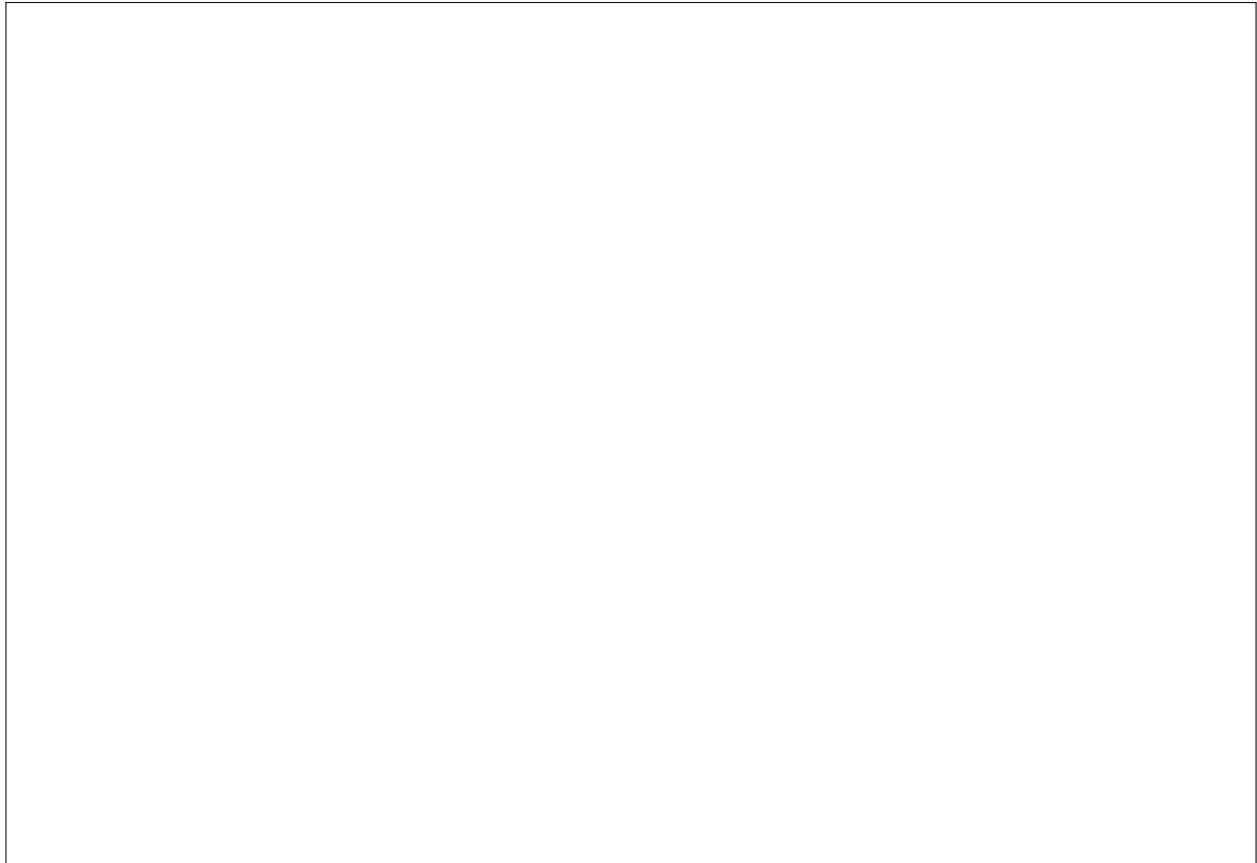
PROVA.

(24) **C**

(16) **C1.** Seja  $\sim$  uma relação de equivalência no conjunto  $\mathbb{N}$ . Prove que

$$\mathbb{N}/\sim <_c \mathcal{P}\mathbb{N}.$$

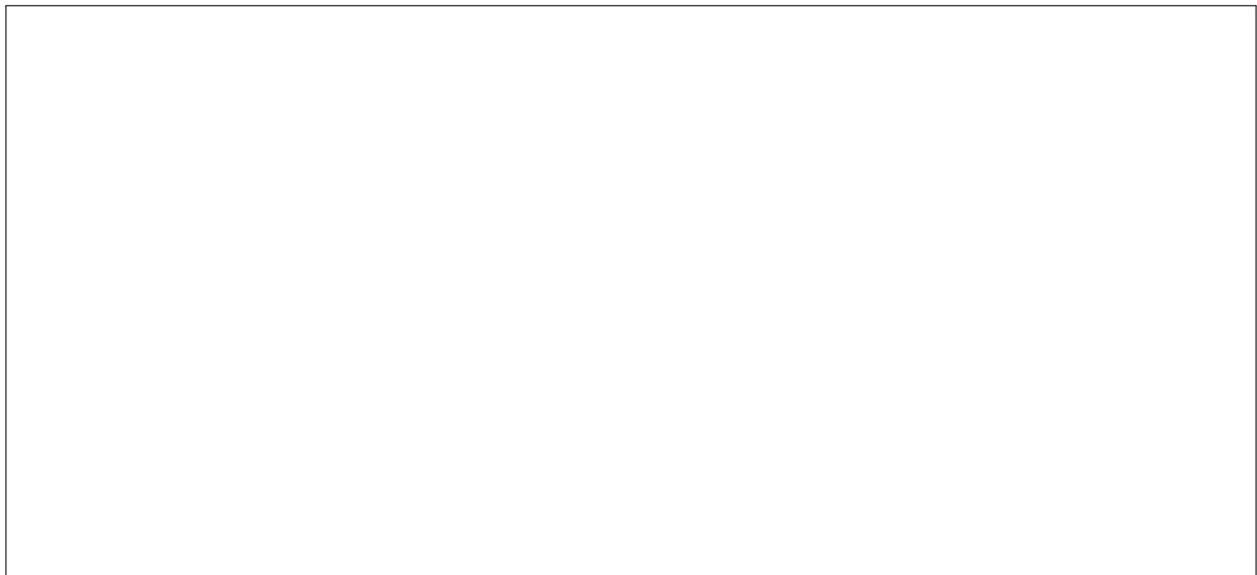
PROVA.



(8) **C2.** Afirmação: *Para qualquer conjunto  $A$ , se  $\sim$  é uma relação de equivalência no  $A$ , então*

$$A/\sim <_c \mathcal{P}A.$$

PROVA/REFUTAÇÃO.



(24 + 16<sup>b</sup>) **D**

No conjunto  $\mathbb{R}$  defina as relações:

$$x \smile y \stackrel{\text{def}}{\iff} x \leq y \wedge (\nexists n \in \mathbb{Z})[x \leq n \leq y]$$

$$x \frown y \stackrel{\text{def}}{\iff} x \leq y \wedge (\nexists n \in \mathbb{Z})[x < n < y]$$

Sejam  $\smile\smile$  o fecho reflexivo-simétrico da  $\smile$ , e  $\frown\frown$  o fecho simétrico da  $\frown$ .

(12) **D1.** Prove que  $\smile\smile$  é uma relação de equivalência.

PROVA.

(12) **D2.** Afirmação:  $\frown\frown$  é uma relação de equivalência.

PROVA/REFUTAÇÃO.

(16<sup>b</sup>) **D3.** Ache as cardinalidades dos conjuntos:

(i)  $\mathbb{R}/\sim$

RESPOSTA & PROVA.

(ii)  $\{|C| \mid C \in \mathbb{R}/\sim\}$

RESPOSTA & PROVA.

Só isso mesmo.

## RASCUNHO

## RASCUNHO

## RASCUNHO

## RASCUNHO

## RASCUNHO

## RASCUNHO