FMC2, 2017.1
(Turma T56 do Thanos)

Prova 1.1
(points: 28/100; bonus: $6^\flat$; time: 90')

Nome: Θάνος **Gabarito**

22/03/2017

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x \big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra, antes de usá-la.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

(9) **A**

(4) **A1.** Defina formalmente (usando ou "$\ldots \overset{\text{def}}{\iff} \ldots$" ou "$\ldots \overset{\text{def}}{=} \ldots$") os operadores $\mathcal{P}$ e $\bigcup$:

DEFINIÇÃO DE $\mathcal{P}$.

$\mathcal{P}A \overset{\text{def}}{=} \{a \mid a \subseteq A\}$

DEFINIÇÃO DE $\bigcup$.

$x \in \bigcup \mathscr{A} \overset{\text{def}}{\iff} \exists A\big(x \in A \land A \in \mathscr{A}\big)$

(5) **A2.** Prove a igualdade

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B).$$

PROOF.

$$\begin{aligned}
x \in C \setminus (A \cup B) &\iff x \in C \land \neg(x \in A \cup B) && \text{(def. } \setminus\text{)} \\
&\iff x \in C \land \neg(x \in A \lor x \in B) && \text{(def. } \cup\text{)} \\
&\iff x \in C \land (x \notin A \land x \notin B) && \text{(De Morgan)} \\
&\iff (x \in C \land x \notin A) \land (x \in C \land x \notin B) && \text{(lógica)} \\
&\iff (x \in C \setminus A) \land (x \in C \setminus B) && \text{(def. } \setminus\text{)} \\
&\iff x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B) && \text{(def. } \cap\text{)}
\end{aligned}$$

(9) **B**

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções. Prove que:

(5) **B1.** Se f e g são injetoras, $g \circ f$ também é.
Prova.

Verificamos que se $x, y \in A$, então:

$$\begin{aligned} x \neq y &\implies f(x) \neq f(y) && (f \text{ injetora}) \\ &\implies g\big(f(x)\big) \neq g\big(f(y)\big) && (g \text{ injetora}) \\ &\implies (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(y) && (\text{def. de } \circ) \end{aligned}$$

(4) **B2.** Se f e g são sobrejetoras, $g \circ f$ também é.
Prova.

Seja $c \in C$.
Seja $b \in B$ tal que $g(b) = c$. (Existe tal b porque g é sobrejetora e $c \in \operatorname{cod}(g)$.)
Seja $a \in A$ tal que $f(a) = b$. (Existe tal a porque f é sobrejetora e $b \in \operatorname{cod}(f)$.)
Calculamos:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a) &= g\big(f(a)\big) && (\text{def. de } \circ) \\ &= g(b) && (\text{def. de } a) \\ &= c && (\text{def. de } b) \end{aligned}$$

$(10+6^\flat)$ **C**

(10) **C1.** Para todo conjunto C e cada família de conjuntos $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$,

$$C \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} (C \setminus A_n).$$

PROVA.

$$\begin{aligned}
x \in C \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n &\iff x \in C \land \neg\left(x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) && \text{(def. } \setminus\text{)}\\
&\iff x \in C \land \neg(\exists n \in \mathbb{N})[x \in A_n] && \text{(def. } \textstyle\bigcup_{n=0}^{\infty}\text{)}\\
&\iff x \in C \land (\forall n \in \mathbb{N})[x \notin A_n] && \text{(De Morgan)}\\
&\iff (\forall n \in \mathbb{N})[x \in C \land x \notin A_n] && \text{(lógica)}\\
&\iff (\forall n \in \mathbb{N})[x \in C \setminus A_n] && \text{(def. } \setminus\text{)}\\
&\iff x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} (C \setminus A_n) && \text{(def. } \textstyle\bigcap_{n=0}^{\infty}\text{)}
\end{aligned}$$

(Observe a semelhança entre essa prova e a de **A2**: até nas justificativas de cada passo!)

$(6^\flat)$ **C2.** O que precisamos observar para ganhar o **A2** como um corolário do **C1**?

PROVA.

Dados conjuntos A, B, C, precisamos mostrar que: $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$. Seja $\{A_n\}_n$ a seqüência $A, B, B, B, \cdots$, (ou seja, a seqüência definida pelas: $A_0 = A$, e $A_i = B$ para $i > 0$). Pela **C2** temos:

$$C \setminus \underbrace{\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n}_{A \cup B} = \underbrace{\bigcap_{n=0}^{\infty} (C \setminus A_n)}_{(C \setminus A) \cap (C \setminus B)}.$$

Só isso mesmo.