FMC2, 2016.1

(Turma do Thanos)

Problem set B[1]

B.1 Escrevendo as árvores sintáticas, mostre que as seguintes expressões são fórmulas bem formadas da lógica proposicional $\mathcal{F}_0$:

(i) $(\neg p_2)$

(ii) $(p \to (q \lor r))$

(iii) $((p \leftrightarrow q) \land (q \lor (\neg(\neg r))))$

B.2 Escrevendo as árvores sintáticas, mostre que as seguintes expressões são fórmulas bem formadas da lógica de predicados $\mathcal{F}_1$: [2]

(i) $R(x, y)$

(ii) $(P(x, f(x)) \to \exists y(\neg(y = f(y))))$

(iii) $\exists x \forall y(R(x, y) \to R(y, x))$

(iv) $\forall x \exists y(P(x, y) \lor (\neg \forall z Q(z, x)))$

B.3 Fazendo as proprias substituições (passo a passo), transforme as fórmulas seguintes para equivalentes, onde as negações aparecem apenas em frente de fórmulas atômicas:

(i) $(\neg(p \land q))$

(ii) $(\neg(p \lor (\neg q)))$

(iii) $(\neg(p \to (q \land r)))$

(iv) $(\neg(p \to (q \to p)))$

(v) $(\neg \forall x \forall y(R(x, y) \lor Q(y, x)))$

(vi) $(\neg(\neg \forall x \forall y \forall z(R(x, y) \land R(y, z)) \to \exists w Q(x, w, z)))$

B.4 Para cada formula seguinte da $\mathcal{F}_1$, defina um "mundo" onde ela é válida, e um onde ela não é. Para especificar um mundo, precisa definir qual será o universo dele, e as interpretações dos símbolos de funções e predicados que aparecem na fórmula:

(i) $\forall x \exists y R(x, y)$

(ii) $\exists x \forall y R(x, y)$

(iii) $\forall x \forall y\, (E(f(x), f(y)) \to E(x, y))$

(iv) $\forall x R(x, f(x))$

(v) $\forall x \forall y(g(x) = g(y))$

(vi) $\forall x \forall y(x = y)$

---

[1] Em português péssimo ☹

[2] Assuma que todos os símbolos de predicados estão seguidos para o certo número de argumentos.

B.5 Uma definição de adição recursiva é:

$$\begin{aligned} 0 + y &= y \\ x^+ + y &= (x+y)^+ \end{aligned}$$

Mostre que é comutativa, ou seja, para todos os $x, y \in \mathbb{N}$, $x + y = y + x$.

B.6 Defina a multiplicação recursivamente, e mostre que é comutativa, ou seja, para todos os $x, y \in \mathbb{N}$, $x \cdot y = y \cdot x$.

B.7 Defina as seguintes funções de números recursivamente:

(i) $(\ )^-\ :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, que retorna o predecessor da entrada (com a convenção que o 0 é o predecessor dele mesmo). Por exemplo, $7^- = 6$, e $0^- = 0$.

(ii) $\dot{-}\ :\ \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, que é a substração dos naturais, onde: $x \dot{-} y = \max(0, x-y)$. Por exemplo, $12 \dot{-} 5 = 7$, e $5 \dot{-} 12 = 0$.

(Vocês podem usar só funções que já definimos recursivamente. Por exemplo, a subtração "normal", não é definida.)

B.8 Defina uma função *subformulas* $:\ \mathcal{F}_0 \to \mathcal{P}(\mathcal{F}_0)$, que retorna o conjunto de todas as fórmulas que aparecem na árvore sintática da entrada dela. Por exemplo:

$$\mathit{subformulas}\left((q \to (p \vee (\neg r)))\right) = \left\{p, q, r, (\neg r), (p \vee (\neg r)), (q \to (p \vee (\neg r)))\right\}.$$

B.9

(i) Seja $h\ :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função definida com as seguintes equações:

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ h(1) &= 0 \\ h(n+2) &= h(n) + 1 \end{aligned} \qquad \text{ou, formalmente,} \qquad \begin{aligned} h(0) &= 0 \\ h(0^+) &= 0 \\ h(n^{++}) &= h(n)^+. \end{aligned}$$

Calcule os valores $h(7)$, $h(8)$, e explique qual é a função da h.

(ii) Sem usar a adição, defina recursivamente a função *avg* $:\ \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ da média aritmética dos naturais, onde

$$\mathit{avg}(m, n) = \left\lfloor \frac{m+n}{2} \right\rfloor.$$

Por exemplo, $\mathit{avg}(10, 2) = 6$, e $\mathit{avg}(5, 10) = 7$.