FMC1, 2023.2
(Turma M56 do Thanos)

Prova IDMb.2
(points: 76; bonus: $0^\flat$; time: 52')

Nome:

2023-12-18

Regras:

- **I.** Não vires esta página antes do começo da prova.
- **II.** Nenhuma consulta de qualquer forma.
- **III.** Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]
- **IV.** Nenhuma comunicação de qualquer forma.
- **V.** $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC1})\,]$.[2]
- **VI.** Responda dentro das caixas indicadas.
- **VII.** Os pontos bônus são considerados apenas para quem consegue ser aprovado sem eles e tem pelo menos 50 pontos na mesma unidade. São transferíveis para outras unidades com pelo menos 50 pontos também.[3]
- **VIII.** **Escolha até 2 dos $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$.**[4]

Esclarecimentos.

Estamos usando os reais $\mathbb{R}$ com o *axioma* da completude:

$$(\forall A : \mathsf{Set\ Real})[\,A \text{ habitado } \ \&\ \ A \text{ cotado por cima} \implies A \text{ possui supremum}\,]. \qquad \text{(R-Compl)}$$

Suas respostas precisam ser escritas na linguagem "(mid+)-level" que temos elaborado.

Em todos os problemas, podes usar os teoremas que demonstramos na primeira parte do IDMb (pré-completude), exceto no **A1**. Podes usar (sem demonstrar) os (NIP), (MCT), (BW), e (CCC).

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

[4] Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(21) **A** *Demonstre **até uma** das:*

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.
(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.
(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.
(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$: $\mathsf{Seq\ Real}$ convergentes. $\lim_n (a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.
DEMONSTRAÇÃO DA _____ .

(24) **B**

Sejam A, B : $\mathsf{Set\ Real}$ conjuntos habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
DEMONSTRAÇÃO.

(6) **B2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.
RESPOSTA.

(52) **D**

Seja $(a_n)_n$ tal que suas subseqüências $(a_{2n})_n$, $(a_{2n+1})_n$, e $(a_{3n})_n$ são todas convergentes.

(20) **D1.** Demonstre que as três seqüências convergem ao mesmo limite ℓ.
DEMONSTRAÇÃO.

(12) **D2.** (Meta)demonstre que apagando qualquer uma das 3 hipoteses o **D1** vira indemonstrável.
RESPOSTA.

(20) **D3.** Dado o **D1,** demonstre que $(a_n)_n \to \ell$.
DEMONSTRAÇÃO.

Só isso mesmo.

RASCUNHO