
Nome:

2023-12-18

Regras:

- I. Não vires esta página antes do começo da prova.
- II. Nenhuma consulta de qualquer forma.
- III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).¹
- IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma.
- V. $(\forall x)[\text{Colar}(x) \implies \neg \text{Passar}(x, \text{FMC1})]$.²
- VI. Responda dentro das caixas indicadas.
- VII. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consegue ser aprovado sem eles e tem pelo menos 50 pontos na mesma unidade. São transferíveis para outras unidades com pelo menos 50 pontos também.³
- VIII. Escolha até 2 dos A, B, D.⁴

Esclarecimentos.

Estamos usando os reais \mathbb{R} com o *axioma* da completude:

$(\forall A : \text{Set Real})[A \text{ habitado} \ \& \ A \text{ cotado por cima} \implies A \text{ possui supremum}]$. (R-Compl)

Suas respostas precisam ser escritas na linguagem “(mid+)-level” que temos elaborado.

Em todos os problemas, podes usar os teoremas que demonstramos na primeira parte do IDMb (pré-completude), exceto no **A1**. Podes usar (sem demonstrar) os (NIP), (MCT), (BW), e (CCC).

Boas provas!

¹Ou seja, *desligue antes* da prova.

²Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

³Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

⁴Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(21) **A**

Demonstre até uma das:

(12) **A1.** Demonstre a unicidade dos inversos multiplicativos.

(21) **A2.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.

(21) **A3.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \rightarrow 0$.

(18) **A4.** Sejam $(a_n)_n, (b_n)_n$: Seq Real convergentes. $\lim_n(a_n - b_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA _____ .

(24) **B**

Sejam A, B : Set Real conjuntos habitados e cotados.

(18) **B1.** $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

DEMONSTRAÇÃO.

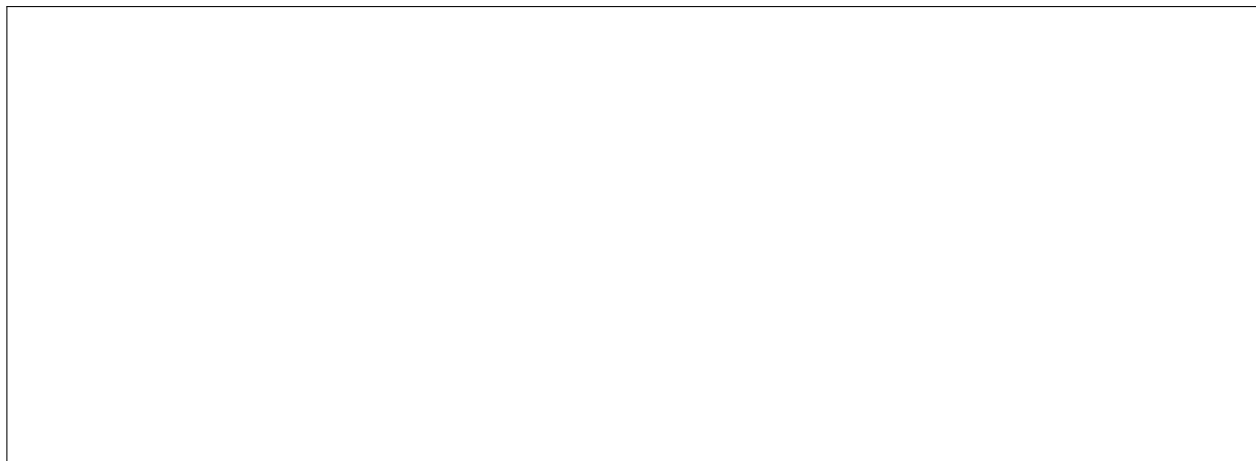
(6) **B2.** Mostre que, em geral, $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$.

RESPOSTA.

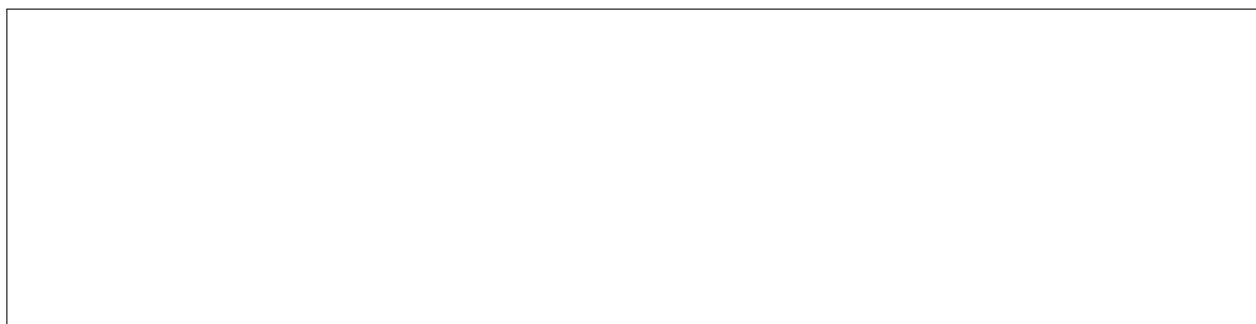
(52) **D**

Seja $(a_n)_n$ tal que suas subsequências $(a_{2n})_n$, $(a_{2n+1})_n$, e $(a_{3n})_n$ são todas convergentes.

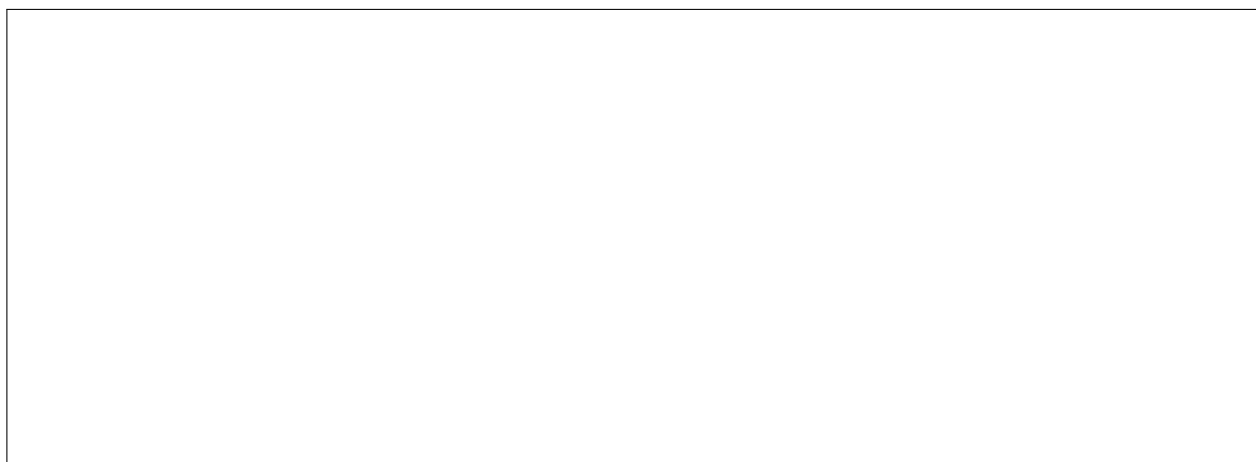
(20) **D1.** Demonstre que as três seqüências convergem ao mesmo limite ℓ .
DEMONSTRAÇÃO.



(12) **D2.** (Meta)demonstre que apagando qualquer uma das 3 hipoteses o **D1** vira indemonstrável.
RESPOSTA.

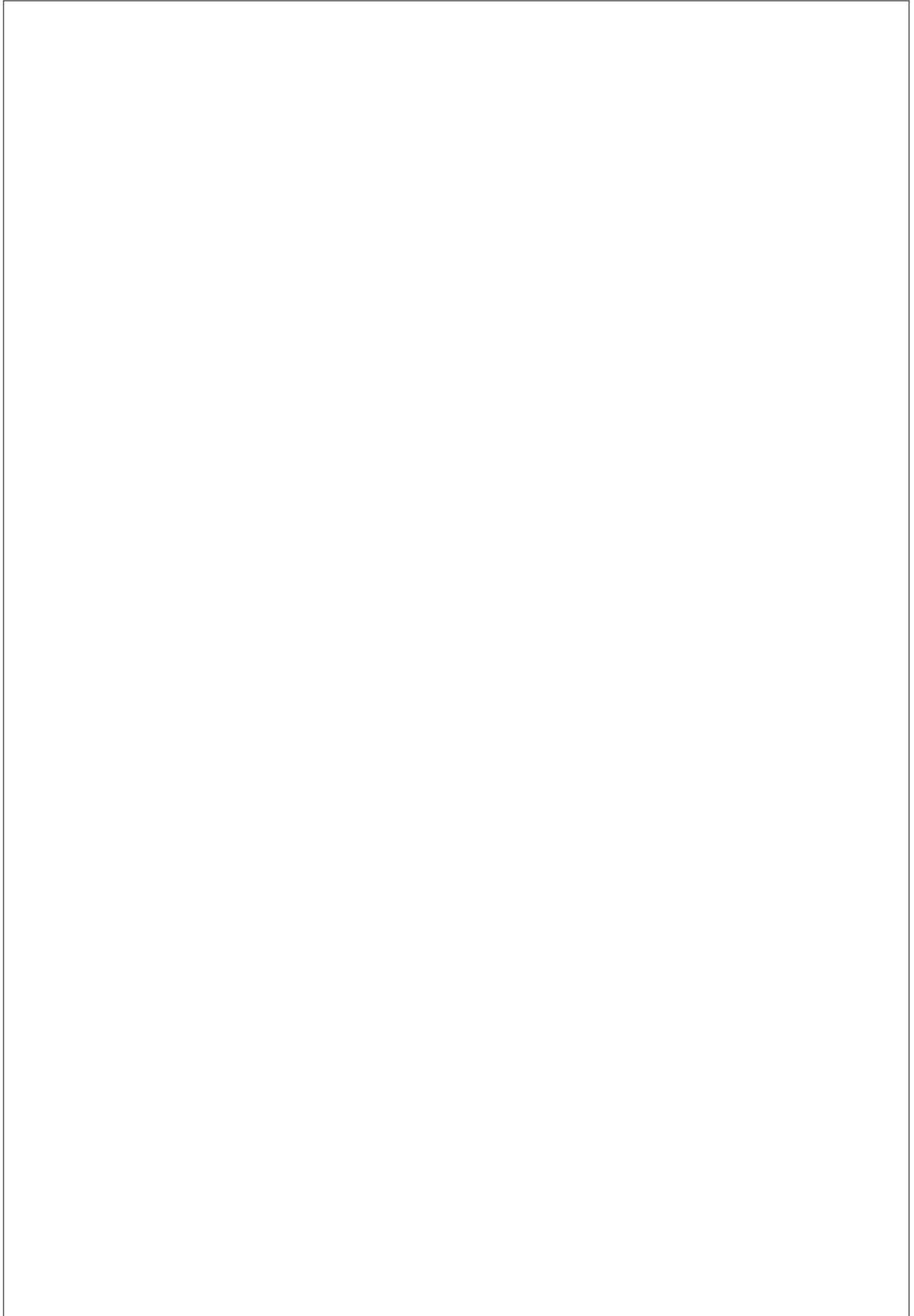


(20) **D3.** Dado o **D1**, demonstre que $(a_n)_n \rightarrow \ell$.
DEMONSTRAÇÃO.



Só isso mesmo.

LEMMATA



RASCUNHO