(24) **I**

Sejam I um intervalo de reais, $(a_n)_n$ uma seqüência de reais convergente, e ℓ o seu limite. Considere a proposição:

$$\text{eventualmente } (a_n)_n \subseteq I \iff \ell \in I.$$

(8) **I1.** Dê um contraexemplo para cada direção.

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longrightarrow$).

$I \stackrel{\text{def}}{=} (3, 10)$

$(a_n)_n \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{n}$ → diverge

$\ell \stackrel{\text{def}}{=} 1$

Escolha 4, 9 como testemunho? X

$\ell = |\sqrt{4} - \sqrt{9}| = |2-3| = 1.$

$1 \notin I$

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longleftarrow$).

$I \stackrel{\text{def}}{=} (0, 1]$

$(a_n)_n \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{n}$ → diverge

$\ell \stackrel{\text{def}}{=} 1$

Escolha 4, 9 como testemunho? X

$\ell \in I$

$\sqrt{4}$ & $\sqrt{9} \notin I$.

(16) **I2.** Adicione uma hipótese simples e interessante nos teus dados, com qual uma direção vira demonstrável, e demonstre.

EXTRA DADO: $I = [u, v]$.

DEMONSTRAÇÃO DA $\subseteq$? ?.

Seja N tq. $(\forall n \geq N)[(a_n)_n \subseteq I]$. esse $\forall n$ ficou solto!

Sejam u, v. tq. $a_u \subseteq I$ & $a_v \subseteq I$.

basta demonstrar $|u - v| \in [u, v]$?

Seja $\varepsilon > 0$

temos $d(u, v) < \varepsilon$

logo $|u - v| < \varepsilon$

Sorry

Só isso mesmo.

(24) **C**

(16) **C1.** Considere a proposição:

$$(a_n)_n \text{ cotada} \iff (a_n)_n \text{ cercada}.$$

Para cada direção: se é válida, demonstre, senão refute.
(DEMONSTRA/REFUTA)Ç(ÃO/ÕES).

Seja $(a_m)_m$: Seq(Real).
Parte ($\Rightarrow$):
Seja m, M tq $m \leq (a_m)_n \leq M$.
Vou demonstrar que $\forall n [d(a_m, \ ) <$

(8) **C2.** Demonstre que a vericidade da **C1** depende da distância usada.
RESPOSTA.

(24) **C**

(16) **C1.** Considere a proposição:

$$(a_n)_n \text{ cotada} \iff (a_n)_n \text{ cercada.}$$

Para cada direção: se é válida, demonstre, senão refute.
(DEMONSTRA/REFUTA)Ç(ÃO/ÕES).

Parte ($\Rightarrow$):

Suponha $(a_n)_n$ cotada
Sejam c, R : Reais ← arbitrários.
como $(a_n)_n$ é cotada, logo seja p t.q p é cota inferior de $(a_n)_n$
logo $p \leq A$ ← ? quem é?
não dá para diferenciar
logo $d(p, a) < r$
logo seja P t.q P é cota superior da $(a_n)_n$
logo $P \geq A$
logo $(P, a) < R$ (cadê a bola?)
por quê?

Parte ($\Leftarrow$)

(8) **C2.** Demonstre que a vericidade da **C1** depende da distância usada.
RESPOSTA.

(24) **I**

Sejam I um intervalo de reais, $(a_n)_n$ uma seqüência de reais convergente, e ℓ o seu limite. Considere a proposição:

$$\text{eventualmente } (a_n)_n \subseteq I \iff \ell \in I.$$

(8) **I1.** Dê um contraexemplo para cada direção.

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longrightarrow$).

Contraexemplo:

$I \overset{\text{df}}{=} (0,1]$

$(a_n)_n \overset{\text{df}}{=} \left(\frac{1}{2^n}\right)_n$

$\ell \overset{\text{df}}{=} 0$

✓

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longleftarrow$).

assim garanta que será considerado errado!

Contraexemplo.

$I \overset{\text{df}}{=} [0,1]$

$(a_n)_n \overset{\text{df}}{=} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)_n$

$\ell \overset{\text{df}}{=} 1$

(16) **I2.** Adicione uma hipótese simples e interessante nos teus dados, com qual uma direção vira demonstrável, e demonstre.

EXTRA DADO: $(\exists u,v)[I=[u,v]]$ X

DEMONSTRAÇÃO DA $\Leftarrow$

~~Suponha eventualmente $(a_n)_n \subseteq I$ e $(\exists u,v)[I=[u,v]]$.~~

~~Sejam u,v reais tq $I=[u,v]$.~~

Suponha $\ell \in I$ e $(\exists u,v)[I=[u,v]]$.

Sejam u,v tq $I=[u,v]$.

Basta demonstrar que o u serve, ou seja, $(a_n)_{n \geq u} \subseteq I$.

Sorry.

Só isso mesmo.

(24) **I**

Sejam I um intervalo de reais, $(a_n)_n$ uma seqüência de reais convergente, e ℓ o seu limite. Considere a proposição:

$$\text{eventualmente } (a_n)_n \subseteq I \iff \ell \in I.$$

(8) **I1.** Dê um contraexemplo para cada direção.

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longrightarrow$).

$I \overset{\text{df}}{=} [0,1)$ ✗

$(a_n)_n \overset{\text{df}}{=} \left(\frac{1}{2^n}+1\right)_n$

$\ell \overset{\text{df}}{=} 1$ ↑ não está ev. $\subseteq I$

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longleftarrow$).

$I \overset{\text{df}}{=} [0,0]$

$(a_n)_n \overset{\text{df}}{=} \left(\frac{1}{2^n}\right)_n$ ✓

$\ell \overset{\text{df}}{=} 0$

(16) **I2.** Adicione uma hipótese simples e interessante nos teus dados, com qual uma direção vira demonstrável, e demonstre.

EXTRA DADO: ~~$(a_n)_n$ constante~~

DEMONSTRAÇÃO DA ~~$\Rightarrow$~~.

Seja k t.q. $(\forall n)[a_n = k]$.
Vou demonstrar que $a_n \to k$.
Seja $\varepsilon > 0$.
Basta demonstrar $(\forall n)[d(a_n, k) < \varepsilon]$
Seja n : Nat.
Calc: $d(a_n,$

Só isso mesmo.

(24) **I**

Sejam I um intervalo de reais, $(a_n)_n$ uma seqüência de reais convergente, e ℓ o seu limite. Considere a proposição:

$$\text{eventualmente } (a_n)_n \subseteq I \iff \ell \in I.$$

(8) **I1.** Dê um contraexemplo para cada direção.

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longrightarrow$).

Contraexemplo:
$I \stackrel{\text{def}}{=} (0, +\infty)$
$(a_n)_n \stackrel{\text{def}}{=} (\frac{1}{n})_n$
$\ell \stackrel{\text{def}}{=} 0$

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longleftarrow$).

Contraexemplo:
$I \stackrel{\text{def}}{=} [42, +\infty)$??
$(a_n)_n \stackrel{\text{def}}{=} (n)_{n<42}$
$\ell \stackrel{\text{def}}{=} 42$

(16) **I2.** Adicione uma hipótese simples e interessante nos teus dados, com qual uma direção vira demonstrável, e demonstre.

EXTRA DADO: I é fechado-aberto.

DEMONSTRAÇÃO DA I1 .

Suponha eventualmente $(a_n)_n \subseteq I$.
Logo, seja $\varepsilon > 0$ t.q.

Só isso mesmo.

(24) **C**

(16) **C1.** Considere a proposição:

$$(a_n)_n \text{ cotada} \iff (a_n)_n \text{ cercada.}$$

Para cada direção: se é válida, demonstre, senão refute.
(DEMONSTRA/REFUTA)Ç(ÃO/ÕES).

Parte $\Rightarrow$: Suponha $(a_n)_n$ cotada. Seja m t.q $m \leq A$. ✓ Basta demonstrar $(\exists r)(\forall a)[d(a,c) < r]$ Seja M t.q $A \leq M$. ✓ Basta demonstrar $(\forall a)[d(a,c) < r]$ ✗ quem e? Seja a Real. Calc.: $d(a,c) = d(m,M)$ [escolha de M e m] $= \lvert m - M \rvert$ $< r$.	Parte $\Leftarrow$: Suponha $(a_n)_n$ cercada. quem é? ~~Suponha~~ Sejam c, r, a t.q. $d(a,c) < r$ Basta demonstrar $m \leq A \leq M$ ✗ Calc.: quem é? $d(a,c) = \lvert a - c \rvert$ Logo $m \leq A \leq M$ pela escolha de r, c.

(8) **C2.** Demonstre que a vericidade da **C1** depende da distância usada.
RESPOSTA.

(24) **C**

(16) **C1.** Considere a proposição:

$$(a_n)_n \text{ cotada} \iff (a_n)_n \text{ cercada.}$$

Para cada direção: se é válida, demonstre, senão refute.
(DEMONSTRA/REFUTA)Ç(ÃO/ÕES).

($\Rightarrow$):	($\Leftarrow$): ✓
Sejam m, M : Real, t.q. $m \leq (a_n)_n \leq M$	Sejam c, r : Real, t.q. $(\forall n)[d(a_n, c) < r]$
Basta demonstrar $(\forall n)\left(d\left(a_n, \frac{M+m}{2}\right) < \frac{M-m}{2}\right]$ ✓ ✓	Basta demonstrar que $c - r < (a_n)_n < c + r$ ✓
Seja n : Nat.	Seja n : Nat
Como $a_n \leq M$, logo	Como $d(a_n, c) < r$, logo $\lvert a_n \rvert < \lvert c \rvert + r$?
↯	Logo, $a_n < c + r$. ✗
	Como ~~[illegible]~~ $a_n < c + r$, logo $a_n > c - r$. ✗
	∎

(8) **C2.** Demonstre que a vericidade da **C1** depende da distância usada.
RESPOSTA.

(24) **I**

Sejam I um intervalo de reais, $(a_n)_n$ uma seqüência de reais convergente, e ℓ o seu limite. Considere a proposição:

$$\text{eventualmente } (a_n)_n \subseteq I \iff \ell \in I.$$

(8) **I1.** Dê um contraexemplo para cada direção.

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longrightarrow$).

$I \stackrel{\text{def}}{=} (0, 1]$
$(a_n)_n \stackrel{\text{def}}{=} (\frac{1}{n})_n$
$\ell \stackrel{\text{def}}{=} 0$

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longleftarrow$).

$I \stackrel{\text{def}}{=} \{0\}$ o que é isso? 1?
$\ell \stackrel{\text{def}}{=} 0$
$(a_n)_n \stackrel{\text{def}}{=} (\frac{1}{n})_n$

(16) **I2.** Adicione uma hipótese simples e interessante nos teus dados, com qual uma direção vira demonstrável, e demonstre.

EXTRA DADO: I é um intervalo fechado

DEMONSTRAÇÃO DA $\Rightarrow$.

Suponha eventualmente $(a_n)_n \subseteq I$.
Logo seja N t.q. $(\forall_{n \geq N})[a_n \in I]$.
Temos que I é um intervalo fechado, logo seja $M = \max I$ e $m = \min I$.
Seja $\varepsilon_1 = \max I - \ell$. onde usou?
Calc:
$$\ell \leq (d(a_N, \ell) + \ell) < \max I.$$
Para $\ell \geq \min I$ similar.
Logo $\ell \in I$.

Só isso mesmo.

(24) **C**

(16) **C1.** Considere a proposição:

$$(a_n)_n \text{ cotada} \iff (a_n)_n \text{ cercada}.$$

Para cada direção: se é válida, demonstre, senão refute.
(DEMONSTRA/REFUTA)Ç(ÃO/ÕES).

Seja $(a_n)_n$: Seq($\mathbb{R}$)

($\Longrightarrow$):

Sejam m, M t.q. $m \leq (a_n)_n \leq M$ ✓

Seja $c = m$. ✓

Seja $r = |M - m| + 1$. ✓

Basta demonstrar $(a_n)_n \subseteq B_r(c)$ ✓

Seja x membro de $(a_n)_n$.

Logo $0 \leq x - m \leq M - m$. ✓

Logo $|x - m| \leq |M - m|$. ✓

Logo $d(x, m) \leq |M - m| < |M - m| + 1$ ✓

Logo $d(x, m) < |M - m| + 1$. ✓

∎

($\Longleftarrow$):

Sejam c, r t.q. $(\forall n)[d(a_n, c) < r]$

Basta demonstrar que $(\forall x \in \{a_n\})[-|c| \leq x \leq |r|]$. X ??

Seja $x \in \{a_n\}_n$?

Logo $0 \leq |x - c| \boxed{\leq} r$.

Logo $|c| \leq |x| \leq |r|$.

(8) **C2.** Demonstre que a vericidade da **C1** depende da distância usada.
RESPOSTA.

Para solicitar arbitrário membro da $(a_n)_n$, solicite arbitrário n : Nat, assim o a_n é um arbitrário membro da $(a_n)_n$.

(24) **I**

Sejam I um intervalo de reais, $(a_n)_n$ uma seqüência de reais convergente, e ℓ o seu limite. Considere a proposição:

$$\text{eventualmente } (a_n)_n \subseteq I \iff \ell \in I.$$

(8) **I1.** Dê um contraexemplo para cada direção.

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longrightarrow$).

tome $(a_n)_n := 1/2^n$; $I := [1/2, 0)$ e $\ell := 0$.

$= \emptyset$

quis dizer $(0, \frac{1}{2}]$? ou $[-\frac{1}{2}, 0)$? ou...?

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longleftarrow$).

tome $(a_n)_n := 1/2^n$; $I = [0, +\infty)$ e $\ell := 0$.

mas event. $(a_n)_n \subseteq I$ sim!

(16) **I2.** Adicione uma hipótese simples e interessante nos teus dados, com qual uma direção vira demonstrável, e demonstre.

EXTRA DADO: I é um intervalo fechado

DEMONSTRAÇÃO DA $\Longrightarrow$.

Suponha I um intervalo fechado e eventualmente $(a_n)_n \subseteq I$.
Seja $N : \mathrm{Nat}$, t.q. $(a_n)_{n \geq N} \subseteq I$.
Sejam $\ell : \mathrm{Real}$, $N' : \mathrm{Nat}$, tais que $(\forall n \geq N')[d(a_n, \ell) < 1]$.

já está no escopo

I um intervalo:

$(\exists \ell)[(a_n)_n \to \ell] \to$ l... limite

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n \geq N)[d(a_n, \ell) < \varepsilon]$

seq: [illegible]

$I = [\ ,0)$

$0 \notin I$

Só isso mesmo.

(24) I

Sejam I um intervalo de reais, $(a_n)_n$ uma seqüência de reais convergente, e ℓ o seu limite. Considere a proposição:

$$\text{eventualmente } (a_n)_n \subseteq I \iff \ell \in I.$$

(8) **I1.** Dê um contraexemplo para cada direção.

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longrightarrow$).

$(a_n)_n \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$
$l \stackrel{\text{def}}{=} 0$
$I \stackrel{\text{def}}{=} (0, +\infty)$

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longleftarrow$).

$(a_n)_n \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$
$l \stackrel{\text{def}}{=} 0$
$I \stackrel{\text{def}}{=} (-\infty, 0]$

(16) **I2.** Adicione uma hipótese simples e interessante nos teus dados, com qual uma direção vira demonstrável, e demonstre.

EXTRA DADO: $(\exists u, v)[I = [u, v)]$

DEMONSTRAÇÃO DA $(\Rightarrow)$.

Suponha eventualmente $(a_n)_n \subseteq I$.
Sejam u, v reais t.q. $I = [u, v)$.
Seja N_1 : Nat t.q. $(\forall n \geq N_1)[a_n \subseteq I]$.
Seja l : Real t.q. $(a_n)_n \to l$. × (já está no escopo)
Seja N_2 : Nat t.q. $(\forall n \geq N_2)[d(a_n, l) < 1]$.
Seja $N = \max(N_1, N_2)$.
Seja n : Nat t.q. $n \geq N$.
Logo $a_n \subseteq I$, $d(a_n, l) < 1$.
Temos que $|a_n| - |l| \leq |a_n - l| = d(a_n, l) < 1$
Logo $|a_n| < l + 1$
Como $I = [u, v)$, logo $l \in I$. ??

■

Só isso mesmo.

(24) **C**

(16) **C1.** Considere a proposição:

$$(a_n)_n \text{ cotada} \iff (a_n)_n \text{ cercada}.$$

Para cada direção: se é válida, demonstre, senão refute.
(DEMONSTRA/REFUTA)Ç(ÃO/ÕES).

demostrar $(a_n)_n$ Cotado $\Rightarrow (a_n)_n$ Cercado suponha $(a_n)_n$ Cotado sejam m, M: Real t.q. $m \leq (a_n)_n \leq M$ (h1) Basta demostrar que $(\exists r)(\forall n : \text{Nat})[d(a_n, 0) < r]$ Calc. $d(a_n, 0) = \|a_n - 0\|$ $= \|a_n\|$ (~~..~~ RA-Id) não há n no escopo! Caso $a_n \geq 0$: Basta demostrar que $(\forall n : \text{Nat})[\|a_n\| < M+1]$ seja n: Nat Calc: $\|a_n\| = a_n$ (Pelo |-|) $\leq M$ (Pelo h1) $< M+1$ ~~[illegible]~~ (a1) Imediato Caso $a_n < 0$: Basta demostrar que $(\forall n : \text{Nat})[\|a_n\| < M+1]$ seja n: Nat Calc. $\|a_n\| = -a_n$ (Pelo |-|) $\leq M$ (Pelo mesmo a_n em h1) $< M+1$ (a1) Imediato	demostrar $(a_n)_n$ Cercada $\Rightarrow (a_n)_n$ Cotada: suponha $(a_n)_n$ Cercado. sejam c, r: Real t.q.

(8) **C2.** Demonstre que a vericidade da **C1** depende da distância usada.
RESPOSTA.

(24) **I**

Sejam I um intervalo de reais, $(a_n)_n$ uma seqüência de reais convergente, e ℓ o seu limite. Considere a proposição:

$$\text{eventualmente } (a_n)_n \subseteq I \iff \ell \in I.$$

(8) **I1.** Dê um contraexemplo para cada direção.

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longrightarrow$).

na sequência definida por $a_n = \frac{1}{n}$, temos que ela está contida no intervalo $(0;1]$, mas seu limite, 0, não. ✓

(escreveu isso em vez de: « $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ » ?)

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longleftarrow$).

na mesma sequência, aqui na esquerda, o limite é 0. logo, note que $0 \in \{0\}$, mas de jeito nenhum event. $(a_n)_n \subseteq \{0\}$.

de jeito nenhum isso compila ou oferece qualquer coisa boa à tua demonstração

(16) **I2.** Adicione uma hipótese simples e interessante nos teus dados, com qual uma direção vira demonstrável, e demonstre.

Porque ñ $\perp$?

EXTRA DADO: "I tem forma $[u,v]$".

como tu vai demonstrar isso tendo já percebido contraexemplo?

DEMONSTRAÇÃO DA $\Longleftarrow$.

Suponha $\ell \in I$ e I é um intervalo fechado.
logo sejam u, v t.q. $I = [u,v]$, $u < v$.
Seja m t.q. $(a_n)_{n \geq m} \subseteq B_{|u-v|}(\ell)$.

[

$a_n \subseteq (0;1]$

$(\Leftarrow)$

Suponha $\ell \in I$ e $\ell \in \{a_n\}_n$ $\quad \frac{1}{n}$

Seja N t.q. $(a_n)_{n \geq N} \subseteq B_{|\min I - \max I|}(\ell)$
Vou mostrar que N serve.
seja $n \geq N$ ⊢ $a_n \in I$.
logo $|a_n - \ell| < |\min I - \max I|$ $\rightsquigarrow$ $\theta.\ (\forall x)[x < |\cancel{\min A} - \max A| \Rightarrow$

Só isso mesmo.

(24) **I**

Sejam I um intervalo de reais, $(a_n)_n$ uma seqüência de reais convergente, e ℓ o seu limite. Considere a proposição:

$$\text{eventualmente } (a_n)_n \subseteq I \iff \ell \in I.$$

(8) **I1.** Dê um contraexemplo para cada direção.

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longrightarrow$).

$I \stackrel{\text{def}}{=} (0, \frac{1}{2})$
$(a_n)_n \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{2^n}\right)_n$
$\ell \stackrel{\text{def}}{=} 0.$

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longleftarrow$).

$I \stackrel{\text{def}}{=} [-1, 0]$
$(a_n)_n \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{2^n}\right)_n$
$\ell \stackrel{\text{def}}{=} 0.$

(16) **I2.** Adicione uma hipótese simples e interessante nos teus dados, com qual uma direção vira demonstrável, e demonstre.

EXTRA DADO: I é fechado

DEMONSTRAÇÃO DA ($\Rightarrow$).

Suponha eventualmente $(a_n)_n \subseteq I$ & I é fechado.
Seja N t.q. $(\forall n \geq N)[a_n \in I]$.

Só isso mesmo.

(24) **I**

Sejam I um intervalo de reais, $(a_n)_n$ uma seqüência de reais convergente, e ℓ o seu limite. Considere a proposição:

não dá..

$$\text{eventualmente } (a_n)_n \subseteq I \iff \ell \in I.$$

(8) **I1.** Dê um contraexemplo para cada direção.

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longrightarrow$).

$I := [0, 1]$

$(a_n)_n := \frac{1}{2^{n+1}}$ (por quê?)

$\ell := \cancel{1}\ 0$

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longleftarrow$).

$I := [-1, 0]$

$(a_n)_n := \frac{1}{2^{n+1}}$

$\ell := 0$ ✓

(16) **I2.** Adicione uma hipótese simples e interessante nos teus dados, com qual uma direção vira demonstrável, e demonstre.

EXTRA DADO: $I = [u, v]$

DEMONSTRAÇÃO DA $\Rightarrow$.

Suponha eventualmente $(a_n)_n \subseteq I$. ✓

Seja N_1: nat t.q. $(a_n)_{n \geq N} \subseteq I$. ✓

Como $(a_n)_n \to \ell$, logo (seja N_2 t.q.) $(\forall n \geq N_2)\,[d(a_n, \ell) < v - u]$. X

Seja $N \geq \{N_1, N_2\}$.

Logo $d(a_N, \ell) < v - u$.

~~Logo~~ e $a_N \in I$.

Logo $a_N \leq v - u$. X como??

~~Então~~

~~Logo~~ Como $|a_N - \ell| < v - u$, logo $\ell \in I$. X

Só isso mesmo.

(24) **I**

Sejam I um intervalo de reais, $(a_n)_n$ uma seqüência de reais convergente, e ℓ o seu limite. Considere a proposição:

$$\text{eventualmente } (a_n)_n \subseteq I \iff \ell \in I.$$

(8) **I1.** Dê um contraexemplo para cada direção.

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longrightarrow$).

$(a_n)_n \stackrel{\text{def}}{=} 1/2^n$

$\ell = 0$

$I = (0, 1/2]$

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longleftarrow$).

Mesma $(a_n)_n$, obviamente mesmo ℓ

$I = (-\infty, 0]$

(16) **I2.** Adicione uma hipótese simples e interessante nos teus dados, com qual uma direção vira demonstrável, e demonstre.

EXTRA DADO: I é fechado

DEMONSTRAÇÃO DA $\Longrightarrow$.

Sup ev. $(a_n)_n \subseteq I$

Logo seja N t.q. $(\forall n \geq N)[a_n \in I]$

Como I é fechado, logo sejam S, E t.q. $I = [S, E]$

Logo $(\forall n \geq N)[S \leq a_n \leq E]$

Sorry :∩

:(

Só isso mesmo.

(24) **I**

Erro

Sejam I um intervalo de reais, $(a_n)_n$ uma seqüência de reais convergente, e ℓ o seu limite. Considere a proposição:

$$\text{eventualmente } (a_n)_n \subseteq I \iff \ell \in I.$$

(8) **I1.** Dê um contraexemplo para cada direção.

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longrightarrow$).

I: Seti Reais positivos ???

$(a_n)_n \to 0$ $\quad I = [1, +\infty)$

$a_n \overset{dy}{=} 100$?

$n \overset{dy}{=} \frac{1}{2}$?

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longleftarrow$).

I : Seti[0, 1] ???

$(a_n)_n \to 0$

$a_n \overset{dy}{=} 100$

$n \overset{dy}{=} \frac{1}{2}$

(16) **I2.** Adicione uma hipótese simples e interessante nos teus dados, com qual uma direção vira demonstrável, e demonstre.

EXTRA DADO: $I = [0, +\infty)$

DEMONSTRAÇÃO DA $\Longrightarrow$.

$(a_n)_n \subseteq I \Rightarrow \ell \in I$

Suponha $(a_n)_n \subseteq I$

Só isso mesmo.

(24) **I**

Sejam I um intervalo de reais, $(a_n)_n$ uma seqüência de reais convergente, e ℓ o seu limite. Considere a proposição:

$$\boxed{\text{eventualmente}}\,(a_n)_n \subseteq I \iff \ell \in I.$$

(8) **I1.** Dê um contraexemplo para cada direção.

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longrightarrow$).

Considere a seq. $(\frac{1}{n})_n$. ✓

Considere $I = [1;0)$. $= \emptyset$ X !!

Note que $(\frac{1}{n})_n \to 0$.

Mas ~~ℓ~~ não pertence a I

$0 \notin I$.

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longleftarrow$).

Considere a seq. $(\frac{1}{n})_n$ ✓

Considere $I = [0;-1]$. $= \emptyset$ X !!

Note que $\ell = 1 \in I$ X

mas $(a_n)_n \nsubseteq I$.

(16) **I2.** Adicione uma hipótese simples e interessante nos teus dados, com qual uma direção vira demonstrável, e demonstre.

EXTRA DADO: I é um Intervalo fechado) X

DEMONSTRAÇÃO DA $\Leftarrow$.

Suponha que $\ell \in I$ e I é um intervalo fechado.

Considere $I = [a;b]$.

Vou demonstrar que enventualmente $(a_n)_n \subseteq [a,b]$.

Temos que $(\exists M)(\forall n \geq M)[d(a_n,\ell) < \boxed{\varepsilon}]$ quem é? Não há ε no escopo!!

Logo seja $M : \mathrm{Nat}$ t.q. $(\forall n \geq M)[d(a_n,\ell) < \varepsilon]$

Basta demonstrar que $(a_n)_{n \geq M} \subseteq I$.

Seja $n \geq M$.

Temos que $d(a_n,\ell) < \varepsilon$

Logo $|a_n - \ell| < \varepsilon$.

usem vírgulas para intervalos!

Só isso mesmo.

(24) **C**

(16) **C1.** Considere a proposição:

$$(a_n)_n \text{ cotada} \iff (a_n)_n \text{ cercada.}$$

Para cada direção: se é válida, demonstre, senão refute.
(DEMONSTRA/REFUTA)Ç(ÃO/ÕES).

Seja $(a_n)_n$: Seq Real.

$(\Rightarrow)$:

Suponha $(a_n)_n$ cotada. ✓

Logo seja$^{\text{m}}$ m, M t.q. $m \leq (a_n)_n \leq M$.

Logo $\boxed{\text{seja } n : \text{Nat t.q. } m \leq a_n \leq M.}$

Basta demonstrar $d(a_n, m) < M$.

Imediato (pela escolha de m, M).

isso é um uso de existencial. Mas acho que tu tava querendo usar um $(\forall)$.

talvez $M < 0$.

$(\Leftarrow)$:

Suponha $(a_n)_n$ cercada.

Logo seja$^{\text{m}}$ c, r t.q. $(\forall n)[d(a_n, c) < r]$.

Logo $\boxed{\text{seja } n \text{ t.q. } d(a_n, c) < r.}$

Basta demonstrar $c \leq a_n \leq r$.

Como $|a_n - c| < r$, logo $c \leq a_n \leq r$.

■

talvez nem $c \leq r$!?

(8) **C2.** Demonstre que a veracidade da **C1** depende da distância usada.
RESPOSTA.

(24) **C**

(16) **C1.** Considere a proposição:

$$(a_n)_n \text{ cotada} \iff (a_n)_n \text{ cercada.}$$

Para cada direção: se é válida, demonstre, senão refute.
(Demonstra/Refuta)ç(ão/ões).

($\Leftarrow$):
Suponha $(a_n)_n$ cercada, ou seja, $(\exists c)(\exists r)[(\forall n)[d(a_n, c) < r]]$
Seja^m c e r tal que $(\forall n)[d(a_n, c) < r]$.
aqui não tem 1-1
Vou demonstrar $(a_n)_n$ cotada, ou seja $(\exists m)(\exists M)(\forall n)[m \leq a_n \leq M]$
Escolha $|c|$ e Escolha $r+|c|$ -- $(\forall n)[|c| \leq a \leq r+|c|]$
Seja n : Nat.
O que aconteceu aqui?
como $d(a_n, c) < r$, logo, $|a_n - c| < r$. ~~logo~~ $|c| < |a_n - c + c| < r + |c|$
logo $|c| < |a_n| < r + |c|$

($\Rightarrow$): Suponha $(a_n)_n$ cotada. Seja m e M tal que $(\forall n)[m \leq a_n \leq M]$
Escolha m e Escolha M-m
Seja n : Nat. Como $m \leq a_n \leq M$, logo $m+(-m) \leq a_n+(-m) \leq M+(-m)$. ✓
Logo $0 \leq |a_n - m| \leq M+(-m)$ ✓

(8) **C2.** Demonstre que a vericidade da **C1** depende da distância usada.
Resposta.

(24) **I**

Sejam I um intervalo de reais, $(a_n)_n$ uma seqüência de reais convergente, e ℓ o seu limite. Considere a proposição:

$$\text{eventualmente } (a_n)_n \subseteq I \iff \ell \in I.$$

(8) **I1.** Dê um contraexemplo para cada direção.

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longrightarrow$).

$I \stackrel{\text{def}}{=} (0, \infty)$

$(a_n)_n \stackrel{\text{def}}{=} \boxed{(\forall n > 0)}\,[(a_n)_n = \frac{1}{2^n})$

$\downarrow$

$\ell \stackrel{\text{def}}{=} 0$

TYPE ERROR!

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longleftarrow$).

$I \stackrel{\text{def}}{=} [2, 5]$

$(a_n)_n \stackrel{\text{def}}{=} \underline{(\forall n)(\forall x < 2)\,[(a_n) = x\,]}$

$\downarrow$

$\ell = 2$

TYPE ERROR

não definiu uma seq aqui.

(16) **I2.** Adicione uma hipótese simples e interessante nos teus dados, com qual uma direção vira demonstrável, e demonstre.

$(\forall m)[m = \max I \Rightarrow m \neq \ell]$

EXTRA DADO: $\ell \neq \min I$ & $\ell \neq \max I$

não foi dentro das opções

DEMONSTRAÇÃO DA $\Leftarrow$.

Seja $\ell \in I$, t.q. $\ell \neq \min I$ & $\ell \neq \max I$

logo seja $m = \max I$ tal que $m \neq \ell$

logo seja $m = \min I$ tal que $n \neq \ell$

Seja $x \in a_n$

Aqui tu deve usar um existencial que não tens:

$(\exists m)[\,m = \max I \;\&\; m \neq \ell\,]$

Teus «tal que» eram pra ser «. Logo».

Só isso mesmo.

(24) **I**

Sejam I um intervalo de reais, $(a_n)_n$ uma seqüência de reais convergente, e ℓ o seu limite. Considere a proposição:

$$\text{eventualmente } (a_n)_n \subseteq I \iff \ell \in I.$$

(8) **I1.** Dê um contraexemplo para cada direção.

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longrightarrow$).

$I \stackrel{\text{def}}{=} (0,1]$

$(a_n)_n \stackrel{\text{def}}{=} (1/n)_n$

$\ell \stackrel{\text{def}}{=} 0$

✓

~~CONTRA~~EXEMPLO PARA ($\Longleftarrow$).

$I \stackrel{\text{def}}{=} [0,1)$ mas ?

$(a_n)_n \stackrel{\text{def}}{=} (1/n)_n$ $\subseteq_{ev} I$

$\ell \stackrel{\text{def}}{=} 0$

(16) **I2.** Adicione uma hipótese simples e interessante nos teus dados, com qual uma direção vira demonstrável, e demonstre.

EXTRA DADO: I é um intervalo fechado.

DEMONSTRAÇÃO DA $\Rightarrow$.

O que esse «, para(s)» significa.
Não há ε no escopo aqui!

Logo temos $I = [u, v]$, para $u, v \in \mathbb{R}$

Seja N_1 tq $(a_n)_{n>N_1} \subseteq B_\varepsilon(\ell)$, para $\varepsilon > 0$. ✗

Qual dado tá supostamente usando aqui?
Compare como tal dado, de fato é com como deveria ser para essa linha compilar.

Seja N_2 tq $(a_n)_{n>N_2} \subseteq I$, ou seja, para $n > N_2$, $u \leq a_n \leq v$.

✗ para todo ...

$(\forall \varepsilon>0)(\exists N)[\ldots]$

$(\exists N)(\forall \varepsilon>0)[\ldots]$

⋮

?

Só isso mesmo.

(24) **C**

(16) **C1.** Considere a proposição:

$$(a_n)_n \text{ cotada} \iff (a_n)_n \text{ cercada.}$$

Para cada direção: se é válida, demonstre, senão refute. há algo mal-entendido aqui!
(DEMONSTRA/REFUTA)Ç(ÃO/ÕES). ?? ??

Demonstro

sup é conjunção; inf é disjunção. X

Suponha $(a_n)_n$ cotada, logo $(a_n)_n$ possui inf e sup. X por quê?
Seja A : set(real). ? isso é o quê? Ataque/uso/...??
Logo sejam ℓ, ℓ' t.q ℓ é inf de $(a_n)_n$ e ℓ' é sup $(a_n)_n$
Logo $(\forall a \in (a_n)_n)[(\exists u \in A)[\ell \leq u \leq \ell']]$. X o que teu A tem a ver com a $(a_n)_n$?
Basta demonstrar que $(\exists c)(\exists r)[A \subseteq B_r(c)]$.
Sejam c, r reais t.q $(\forall b)[d(b,c) < r]$. X o que permitiu solicitar tais c, r?

$b \in \mathbb{R}$?
$1 \in ..$?

(8) **C2.** Demonstre que a vericidade da **C1** depende da distância usada.
RESPOSTA.

tome como contra-exemplo $\left(\frac{1}{2^n}\right)$. X

Sorry :(.

:(digo eu

$(a_n)_n$ cotada

$(\exists m)(\exists M)[m \leq A \leq M]$

$(a_n)_n$ cercado $(\forall a_n)[d(a_n, \cdot) < \varepsilon]$

$(\exists c)(\exists r)[A \subseteq \mathcal{B}_r(c)]$

$(a_n)_n \subseteq \mathcal{B}_r(c)$

$(\forall a)(d(a,c) < r$

$d(a_n, c) < \varepsilon$

(24) **C**

(16) **C1.** Considere a proposição:

$0 \leq a_n - m$ $\quad a_n - M \leq 0$

$a_n - M \leq a_n - m$

$$(a_n)_n \text{ cotada} \iff (a_n)_n \text{ cercada.}$$

$\varepsilon(\forall a)(d$ $\quad a \quad c = m$

Para cada direção: se é válida, demonstre, senão refute.
(DEMONSTRA/REFUTA)Ç(ÃO/ÕES).

$(\exists c)(\exists r)(\forall a)[d(a, c) < r]$

(⇒):

Suponha $(a_n)_n$ cotada.

Seja m, M tq $m \leq a_{\boxed{n}} \leq M$ → não há n no escopo

Logo $0 \leq a_n - m$ e $a_n - M \leq 0$

Como $a_n - M \leq a_n - m$, logo

$0 \leq \boxed{a}\ \boxed{(M, n)}$ — o que é isso?

Logo $0 \leq d(a_n, m)$ e $a(a_n - M)$.

Seja n : Nat.

Calc:

$d(a_n, m) < d(a_n, M) + d(M, m)$

$\leq \frac{\boxed{\varepsilon}}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$

$= \varepsilon$

Não há a no escopo.

Não há ε no escopo.

(⇐):

Suponha $(a_n)_n$ cercada.

Seja ℓ tq $(\exists \varepsilon)(\forall a_n)[d(a_n, \ell) < \varepsilon]$

Seja ε tq $(\forall n)[d(a_n, \ell) < \varepsilon]$

junte em uma linha! « Sejam c, ε t.q. ... »

(8) **C2.** Demonstre que a vericidade da **C1** depende da distância usada. ε-perto, discreta $\begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

RESPOSTA.

contraexemplo

tem ... → mas ...

Contraexemplo

com a distância discreta $d(x,y) \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq 1 \end{cases}$ não daria certo.

$\frac{1}{2^n}$ possui cota superior mas $\frac{1}{2^n} \subseteq \mathcal{B}_{(1)}(0) = \{0\}$

mas isso é um problema aqui

Tu tá procurando seq <u>não</u> cotada e mesmo assim cercada.

(24) **I**

Sejam I um intervalo de reais, $(a_n)_n$ uma seqüência de reais convergente, e ℓ o seu limite. Considere a proposição:

$$\text{eventualmente } (a_n)_n \subseteq I \iff \ell \in I.$$

(8) **I1.** Dê um contraexemplo para cada direção.

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longrightarrow$).

$I \overset{\text{def}}{=} [\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$

$\ell \overset{\text{def}}{=} 0$

$(a_n)_n \overset{\text{def}}{=} (\frac{1}{2^n})_n$

×

$(a_n)_n \not\subseteq_{ev} I$

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longleftarrow$).

$I \overset{\text{def}}{=} [0, 1]$

$\ell \overset{\text{def}}{=} 0$

$(a_n)_n \overset{\text{def}}{=} (\frac{1}{2^n})_n$

×

$(a_n)_n \subseteq_{ev} I$

(16) **I2.** Adicione uma hipótese simples e interessante nos teus dados, com qual uma direção vira demonstrável, e demonstre.

EXTRA DADO: $I \neq [\ell, \ell]$

DEMONSTRAÇÃO DA ______ .

Só isso mesmo.

(24) I

Sejam I um intervalo de reais, $(a_n)_n$ uma seqüência de reais convergente, e ℓ o seu limite. Considere a proposição:

$$\text{eventualmente } (a_n)_n \subseteq I \iff \ell \in I.$$

(8) **I1.** Dê um contraexemplo para cada direção.

CONTRAEXEMPLO PARA ($\implies$).

$I \stackrel{def}{=} (1;3]$

$(a_n)_n \stackrel{def}{=} [0;1;2]$?? X

$\ell \stackrel{def}{=} 1$

isso não denota uma seq.

CONTRAEXEMPLO PARA ($\impliedby$).

$I \stackrel{def}{=} (0;3]$

$(a_n)_n \stackrel{def}{=} [2;4]$ X

$\ell \stackrel{def}{=} 3$

(16) **I2.** Adicione uma hipótese simples e interessante nos teus dados, com qual uma direção vira demonstrável, e demonstre.

EXTRA DADO: I é fechado

DEMONSTRAÇÃO DA $\Rightarrow$.

TYPE ERROR

Suponha eventualmente $(a_n)_n \subseteq I$, ou seja, $(\exists N)[(a_n)_{n \geq N}]$. X

X $\boxed{\text{Como } (a_n)_n \subseteq I}$ logo $(\forall n)[a_n \in I]$.

Como $(a_n)_n$ é convergente, logo

trocou o $(\subseteq_{ev})$ por $(\subseteq)$ do nada

Só isso mesmo.

(24) **C**

(16) **C1.** Considere a proposição:

$$(a_n)_n \text{ cotada} \iff (a_n)_n \text{ cercada.}$$

Para cada direção: se é válida, demonstre, senão refute.
(DEMONSTRA/REFUTA)Ç(ÃO/ÕES).

(⇒) SEJA $(a_n)_n$ COTADA SEJAM m, M: T.Q. $m \le A \le M$ ✓ X ESCOLHO m REAL ← pra ser o quê? Não dá para entender quem é o centro e quem o raio. X ESCOLHO M SEJA a: REAL COMO $m \le M$, $\boxed{\text{LOGO}}$ $d(m,a) < M$. não! nem sabemos se $M > 0$. IMEDIATO. ■	(⇐) SEJA $(a_n)_n$ CERCADA SEJAM C, R T.Q. $(\forall a)[d(a,c) < R]$ ✓ ESCOLHO $\lvert a - c \rvert$. Não há a no escopo ESCOLHO R. X ~~Como $(\forall a)[d(a,c)<R]$, logo~~ IMEDIATO. ■

mid-level!

(8) **C2.** Demonstre que a vericidade da **C1** depende da distância usada.
RESPOSTA.

CASO

(24) **C**

(16) **C1.** Considere a proposição:

$$(a_n)_n \text{ cotada} \iff (a_n)_n \text{ cercada.}$$

-- $(\exists m)(\exists M)[m \leq A \leq M] \iff (\exists c)(\exists r)(\forall a)[d(a,c) < r]$

Para cada direção: se é válida, demonstre, senão refute.
(DEMONSTRA/REFUTA)Ç(ÃO/ÕES).

Seja A: Set Real
($\Rightarrow$):
Suponha $(\exists m)(\exists M)[m \leq A \leq M]$. ✓
Seja^m c, r: reais.
Seja a real.
Seja $r > 0$. de novo?
Logo seja

assim são arbitrários
Não vão servir o papel de centro/raio
para cercar tua seqüência.

($\Leftarrow$):
Suponha $(\exists c)(\exists r)(\forall a)[d(a,c) < r]$ ✓
Seja m, M reais. tq. $d(a,c) < r$ ✗
ou seja, $|a - c| < r$. ✗
Seja $m \geq M$ ✗
por que aceitar?
nem aparecem m, M no «t.q. ...»!

(8) **C2.** Demonstre que a vericidade da **C1** depende da distância usada.
RESPOSTA.

(24) **I**

Sejam I um intervalo de reais, $(a_n)_n$ uma seqüência de reais convergente, e ℓ o seu limite. Considere a proposição:

$$\text{eventualmente } (a_n)_n \subseteq I \iff \ell \in I.$$

(8) **I1.** Dê um contraexemplo para cada direção.

Contraexemplo para ($\Longrightarrow$).

$I \stackrel{\text{def}}{=} [1, 1]$

$(a_n)_n \stackrel{\text{def}}{=} (-1^n)_n$

$\ell \stackrel{\text{def}}{=}$ diverge ... então não serve como contraexemplo!

Contraexemplo para ($\Longleftarrow$).

$I \stackrel{\text{def}}{=} [-10, 0]$

$(a_n)_n \stackrel{\text{def}}{=} (2^{-n})_n$

$\ell \stackrel{\text{def}}{=} 0$

(16) **I2.** Adicione uma hipótese simples e interessante nos teus dados, com qual uma direção vira demonstrável, e demonstre.

Extra dado:

Demonstração da ______ .

Só isso mesmo.

(24) **C**

(16) **C1.** Considere a proposição:

$$(a_n)_n \text{ cotada} \iff (a_n)_n \text{ cercada.}$$

use $(\forall n)$...

Para cada direção: se é válida, demonstre, senão refute.
(DEMONSTRA/REFUTA)Ç(ÃO/ÕES).

Parte (=>): Suponha $(a_n)_n$ uma sequência de reais t.q. $(a_n)_n$ é cotada ~~Suponha~~ Seja m real t.q. $(a_n)_n \geq m$ ~~Suponha~~ M real t.q. $(a_n)_n \leq M$ Basta demonstrar que $(\exists c)(\exists r)\boxed{(\forall a_n)}[d(a_n,c)<r]$ Escolho $(\forall n)$	Parte (<=): Suponha $(a_n)_n$ uma sequência de reais t.q. $(a_n)_n$ é cercada ① Seja ~~Suponha~~ c real t.q. $(\exists r)(\forall a_n)[d(a_n,c)<r]$ ② Seja ~~Suponha~~ r real t.q. $(\forall a_n)[d(a_n,c)<r]$ junte! Vou demonstrar que $(\exists M)(\forall a_n)[a_n \leq M]$ Não há n no escopo Logo pelo ② temos que $a_{\boxed{n}} < r+c$ Escolho $r+c$ como testemunha □ Vou demonstrar que $(\exists m)(\forall a_n)[a_n \geq m]$ Logo pelo ② temos que $a_n >$ Não é o que o (2) afirma.

d
$|a_n - c| < r$
$a_n|$

(8) **C2.** Demonstre que a vericidade da **C1** depende da distância usada.
RESPOSTA.

(24) **C**

(16) **C1.** Considere a proposição:

$(\exists m, M)[(\forall n)[m \leq a_n \leq M]]$

$(\forall n)[d(c, a_n) < r]$

$$(a_n)_n \text{ cotada} \iff (a_n)_n \text{ cercada.}$$

$\iff (\exists c, r)[A \subseteq B_r(c)]$

Para cada direção: se é válida, demonstre, senão refute.
(Demonstra/Refuta)ç(ão/ões).

$\Rightarrow$: Seja $(a_n)_n$ uma seq real cotada Sejam m, M t.q. $(\forall n)[m \leq a_n \leq M]$ Seja $A = Max(m, M)$ Basta demonstrar $(\forall n)[d(a_n, \frac{m+M}{2}) < A]$ Seja n: NAT Logo $m \leq a_n \leq M$ já sabe que $M = max(m, M)$!	$\Leftarrow$: Seja $(a_n)_n$ uma seq real ~~cotada~~ cercada Sejam c, r t.q. $(a_n)_n \subseteq B_r(c)$ ① Basta demonstrar $(\forall n)[c-r \leq a_n \leq c+r]$ Seja n: Nat Logo $d(a_n, c) < r$, pelo [①n] ⋮ ? não serve como raio pois nem se é positivo sabemos!

(8) **C2.** Demonstre que a vericidade da **C1** depende da distância usada.
Resposta.

Tome como contra-exemplo a sequência $(n+1)_n$ e a distância $d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq y \\ 0, & \text{se } x = y \end{cases}$	A sequência é cercada: Basta demonstrar $(\forall n)[d((n+1)_n, 0) < 2]$ Seja n: Nat Temos $d((n+1), 0) = 1$ ou 0 Logo $d((n+1)_n, 0) < 2$	A sequência não é cotada Suponha que seja. ~~[illegible]~~ ~~Logo~~ Sejam m, M t.q. $(\forall n)[m \leq (n+1) \leq M]$

$a_n \geq m$

$a_n \leq M$

$\left|a - \frac{m+M}{2}\right| < M$

Tome como contra exemplo a sequência $a_n = \begin{cases} \ldots \\ \ldots \end{cases}$

$a_n \geq m \Rightarrow \frac{a_n + M}{2} \geq \frac{m+M}{2}$

$a_n \leq M \Rightarrow \frac{a_n + m}{2} \leq \frac{m+M}{2}$

Tome contra ex: $(n+1)_n$

$(n)_n$ é cercada pois

$d((n+1), 0) < (n+1)$

Como $M > m$ logo $M > \frac{m+n}{2}$

$d(a_n, c) < r$

$|a_n - c| < r$

$|a_n - c| \leq |a_n| + |-c|$

$= a_n + c$

(24) **I**

Sejam I um intervalo de reais, $(a_n)_n$ uma seqüência de reais convergente, e ℓ o seu limite. Considere a proposição:

$$\text{eventualmente } (a_n)_n \subseteq I \iff \ell \in I.$$

(8) **I1.** Dê um contraexemplo para cada direção.

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longrightarrow$).

$(a_n)_n = \left(\frac{1}{2^n}\right)_n$ $\quad I = (0, 1]$

$(a_n)_n \to 0$

$\ell = 0$

✓

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longleftarrow$).

$(a_n)_n = \left(\frac{1}{2^n}\right)_n$ $\quad I = [0, 0]$

$\ell = 0$ $\quad (a_n)_n \to 0$

✓

(16) **I2.** Adicione uma hipótese simples e interessante nos teus dados, com qual uma direção vira demonstrável, e demonstre.

forte demais para ser interessante!!

EXTRA DADO: $(a_n)_n$ é ~~constante~~ (o que o I ser um intervalo ofereceria aqui?)

DEMONSTRAÇÃO DA ($\Rightarrow$).

Suponha eventualmen $(a_n)_n \subseteq I \land (a_n)_n$ é constante.

Seja K t.q $(\forall n)[a_n = K]$.

Seja $N : \mathrm{Nat}$ t.q $(a_n)_{n \geq N} \subseteq I$

Com $(\forall n)[a_n = K]$, logo $K = \ell$.

Logo $a_N \in I$. [(pela escolha do N) N]

Logo $a_N = K = \ell$, e logo $\ell \in I$. [(pela escolha do K) N].

∎

Só isso mesmo.

(24) **C**

(16) **C1.** Considere a proposição:

$$(a_n)_n \text{ cotada} \iff (a_n)_n \text{ cercada.}$$

Para cada direção: se é válida, demonstre, senão refute.
(DEMONSTRA/REFUTA)Ç(ÃO/ÕES).

Demonstração 1

A cotado $\overset{\text{def}}{\iff}$ $(\exists m, M)[m \leq A \leq M]$ → onde $m \iff c$ e $M \iff r$.

A cercado $\overset{\text{def}}{\iff}$ $(\exists c, r)[A \subseteq \mathcal{B}_r(c)]$

$[A \subseteq \mathcal{B}_r(c)] \iff$ ~~[~~ $[A \subseteq d(x, r)]$?

X

?

$[A \subseteq \mathcal{B}_r(c)] \iff [c \leq A \leq r]$.

X

(1) <u>Demonstração:</u> acima, escrito com letra pequena e possivelmente ilegível, por isso destacado aqui.

??

X

(8) **C2.** Demonstre que a vericidade da **C1** depende da distância usada.
RESPOSTA.

$(\exists b)[d(b, c) > r]$, se esse fosse o caso $A \not\subseteq \mathcal{B}_r(c)$ e haveria contradição com a def. Visto assim, a dependência da $d(b, c)$.

Nada disso faz sentido!