FMC1, 2023.2
(Turma M56 do Thanos)

Prova 3.1
(points: 24; bonus: $0^\flat$; time: 32')

Nome: Θάνος **Gabarito**

2023-12-08

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC1})\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas.

VII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

VIII. **Escolha até 1 dos C, I.**[3]

Suas respostas precisam ser escritas na linguagem "mid-level" que temos elaborado.
Podes usar os teoremas que demonstramos na primeira parte de IDMb.

Usamos Real para denotar um tipo cujos membros chamamos de (números) reais e onde temos os seguintes componentes primitivos:

$$0, 1 : \mathsf{Real} \qquad (+), (\cdot) : \mathsf{Real} \times \mathsf{Real} \to \mathsf{Real} \qquad (-) : \mathsf{Real} \to \mathsf{Real} \qquad (>) : \mathsf{Real} \times \mathsf{Real} \to \mathsf{Prop}.$$

Estipulamos as proposições seguintes como axiomas:

$$(\forall a, b, c)[\,a + (b + c) = (a + b) + c\,] \tag{RA-Ass}$$
$$(\forall a)[\,0 + a = a = a + 0\,] \tag{RA-Id}$$
$$(\forall a)[\,(-a) + a = 0 = a + (-a)\,] \tag{RA-Inv}$$
$$(\forall a, b)[\,a + b = b + a\,] \tag{RA-Com}$$

$$(\forall a, b, c)[\,a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c\,] \tag{RM-Ass}$$
$$(\forall a)[\,a \cdot 1 = a\,] \tag{RM-Id}$$
$$(\forall a \neq 0)(\exists a')\,[\,a' \cdot a = 1 = a \cdot a'\,] \tag{RM-Inv*}$$
$$(\forall a, b)[\,a \cdot b = b \cdot a\,] \tag{RM-Com}$$

$$0 \neq 1 \tag{R-NTriv}$$
$$(\forall d, a, b)[\,(a + b) \cdot d = (a \cdot d) + (b \cdot d) \;\;\&\;\; d \cdot (a + b) = (d \cdot a) + (d \cdot b)\,] \tag{R-Dist}$$

$$(\forall a, b, c)[\,a > b \;\;\&\;\; b > c \implies a > c\,] \tag{RO-Trans}$$
$$(\forall a, b)[\,\text{e.u.d.: } a > b;\; a = b;\; b > a\,] \tag{RO-Tri}$$
$$(\forall a, b, c)[\,a > b \implies a + c > b + c\,] \tag{RO-A}$$
$$(\forall a, b, c)[\,a > b \;\;\&\;\; c > 0 \implies ac > bc\,] \tag{RO-M}$$

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(24) **C**

(16) **C1.** Demonstre a proposição:

$$(a_n)_n \text{ cotada} \iff (a_n)_n \text{ cercada.}$$

DEMONSTRAÇÃO.

($\Rightarrow$): Sejam m, M tais que $m \leq (a_n)_n \leq M$. Logo

$$(a_n)_n \subseteq [m, M] \subseteq (m-1, M+1),$$

que é uma bola (pelo (ball-interval)).

($\Leftarrow$): Seja $\mathcal{B}_r(c)$ bola tal que $(a_n)_n$ está contida nela. Ou seja,

$$\begin{aligned} (a_n)_n &\subseteq \mathcal{B}_r(c) \\ &= (c-r, c+r). && \text{(pelo (ball-interval))} \end{aligned}$$

Logo $c - r$ é uma cota inferior da $(a_n)_n$ e $c + r$ uma cota superior.

(8) **C2.** Demonstre que a vericidade da **C1** depende da distância usada.
RESPOSTA.

Considere a distância discreta e a seqüência $(n)_n$.
A $(n)_n$ não é cotada (para qualquer M, o $\lfloor M+1 \rfloor$-ésimo membro dela é maior).
Mas $(n)_n$ está contida na bola $\mathcal{B}_2(0)$, pois $\mathcal{B}_2(0) = \mathbb{R} \supseteq (n)_n$.

(24) I

Sejam I um intervalo de reais, $(a_n)_n$ uma seqüência de reais convergente, e ℓ o seu limite. Considere a proposição:

$$\text{eventualmente } (a_n)_n \subseteq I \iff \ell \in I.$$

(8) **I1.** Dê um contraexemplo para cada direção.

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longrightarrow$).

$$(1/n)_n \to 0 \notin (0,1)$$

CONTRAEXEMPLO PARA ($\Longleftarrow$).

$$(1/n)_n \to 0 \in [-1,0]$$

(16) **I2.** Adicione uma hipótese simples e interessante nos teus dados, com qual uma direção vira demonstrável, e demonstre.

DADO EXTRA: $(\exists u, v)\,[\, I = (u,v)\,]$

DEMONSTRAÇÃO DA ($\Leftarrow$).

Sejam u, v tais que $I = (u,v)$.
Como I é uma bola, logo seja c seu centro e R seu raio: $I = \mathcal{B}_R(c)$.
Como $\ell \in I = \mathcal{B}_c(R)$, logo $d(c,\ell) < R$, e logo $\underbrace{R - d(c,\ell)}_{r} > 0$.
Seja r esse número positivo.

Como $(a_n)_n \to \ell$, logo eventualmente $(a_n)_n \subseteq \mathcal{B}_r(\ell)$.
Logo basta demonstrar $\mathcal{B}_r(\ell) \subseteq \underbrace{\mathcal{B}_R(c)}_{I}$.
Seja $x \in \mathcal{B}_r(\ell)$.
Calculamos:

$$\begin{aligned}
d(x,c) &\leq d(x,\ell) + d(\ell,c) && \text{(D-Tri)}\\
&< r + d(\ell,c) && \text{(pela escolha de } x\text{)}\\
&= r + (R - r) && \text{(pela escolha de } r\text{)}\\
&= R.
\end{aligned}$$

Ou seja, $x \in \mathcal{B}_R(c)$.

A outra direção também é demonstrável em forma similar, mas trocando o aberto por fechado no dado extra.

Só isso mesmo.

ball-interval.
Nos reais, bolas são intervalos da forma (u, v) e vice-versa.

DEMONSTRAÇÃO.
DE BOLA $\mathcal{B}_r(c)$ PARA INTERVALO (u, v).
A bola $\mathcal{B}_r(c)$ é o intervalo $(c - r, c + r)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_r(c) &= \{\, x \mid d(x, c) < r \,\} \\
&= \{\, x \mid |x - c| < r \,\} \\
&= \{\, x \mid c - r < x < c + r \,\} \\
&= (c - r, c + r)
\end{aligned}$$

DE INTERVALO (u, v) PARA BOLA $\mathcal{B}_r(c)$.
O intervalo (u, v) de reais é a bola com centro $c = (u + v)/2$ e raio o $r = (v - u)/2$:

$$\begin{aligned}
x \in \mathcal{B}_r(c) &\iff d(x, c) < r \\
&\iff |x - c| < r \\
&\iff c - r < x < c + r \\
&\iff x \in (c - r, c + r) \\
&\iff x \in \left(\tfrac{1}{2}(u + v) - \tfrac{1}{2}(v - u), \tfrac{1}{2}(u + v) + \tfrac{1}{2}(v - u)\right) \\
&\iff x \in (u, v).
\end{aligned}$$