FMC1, 2023.2
(Turma M56 do Thanos)

Prova IRI.1
(points: 24; bonus: $0^\flat$; time: 42')

Nome: Θάνος **Gabarito**

2023-09-15

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC1})\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas, escrevendo em forma clara e facilmente legível.

VII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

VIII. Respeite as restrições dos problemas que têm escolha.[3]

Esclarecimento: Tuas demonstrações precisam ser escritas na linguagem mid-level que temos elaborado na disciplina.[4] Tuas definições devem utilizar apenas a sintaxe e a notação que temos utilizado na disciplina.

Dados:

```
data Nat
  O : Nat
  S : Nat → Nat

(+) : Nat → Nat → Nat
m + O     = m
m + (S n) = S (m + n)

(*) : Nat → Nat → Nat
m * O     = O
m * (S n) = m + (m * n)

(^) : Nat → Nat → Nat
m ^ O     = S O
m ^ (S n) = m * (m ^ n)
```

atribuímos em todas essas operações binárias associatividade (sintáctica) à direita. Atribuímos também precedências (sintácticas) de baixa para alta: $(+), (\cdot), (\hat{~})$.
Definimos a relação $(\leq) : \mathsf{Nat} \times \mathsf{Nat} \to \mathsf{Prop}$ pela

$$n \leq m \overset{\text{def}}{\iff} (\exists k)\,[\,n + k = m\,]\,.$$

Boas provas!

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Respostas violando essa regra (respondendo em mais questões) tirarão 0 pontos.
[4] *Não inclua* os Dados/Alvo nem outros rascunhos no teu texto!

(8) **D**

Defina recursivamente (como temos definido nesta disciplina) uma função

$$\mathrm{compare} : \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat}$$

que satisfaz a especificação:

$$\begin{aligned}
\mathrm{compare}\ x\ y = 0 &\iff x = y \\
\mathrm{compare}\ x\ y = 1 &\iff x < y \\
\mathrm{compare}\ x\ y = 2 &\iff y < x
\end{aligned}$$

(Apenas defina; sem demonstrar sua corretude.)
DEFINIÇÃO. *compare* : $\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat}$

$$\begin{array}{llll}
\mathrm{compare} & \mathsf{O} & \mathsf{O} & = \mathsf{O} \\
\mathrm{compare} & \mathsf{O} & (\mathsf{S}\ n) & = 1 \\
\mathrm{compare} & (\mathsf{S}\ m) & \mathsf{O} & = 2 \\
\mathrm{compare} & (\mathsf{S}\ m) & (\mathsf{S}\ n) & = \mathrm{compare}\ m\ n
\end{array}$$

(16) **E** *Demonstre **exatamente uma** das* **E1**, **E2**.

(16) **E1.** $(\forall a)(\forall b)\,(\forall u)\,[\,\mathrm{compare}\ a\ b = \mathrm{compare}\ (a+u)\ (b+u)\,]$.
(8) **E2.** $(\forall a)(\forall b)\,(\forall u)\,[\,(a+b)u = au + bu\,]$.
DEMONSTRAÇÃO DA **E1** .

Sejam $a, b : \mathsf{Nat}$.
Por indução.

BASE: $\mathrm{compare}\ a\ b \overset{?}{=} \mathrm{compare}\ (a+\mathsf{O})\ (b+\mathsf{O})$.
Calculamos:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{compare}\ (a+\mathsf{O})\ (b+\mathsf{O}) \\
&= \mathrm{compare}\ a\ (b+\mathsf{O}) && ((+).1) \\
&= \mathrm{compare}\ a\ b && ((+).1)
\end{aligned}$$

PASSO INDUTIVO.
Seja $k : \mathsf{Nat}$ tal que $\mathrm{compare}\ a\ b = \mathrm{compare}\ (a+k)\ (b+k)$ (HI).
Calculamos:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{compare}\ (a+\mathsf{S}\ k)\ (b+\mathsf{S}\ k) \\
&= \mathrm{compare}\ (\mathsf{S}(a+k))\ (b+\mathsf{S}\ k) && ((+).2 \text{ com } m := a,\ n := k) \\
&= \mathrm{compare}\ (\mathsf{S}(a+k))\ (\mathsf{S}(b+k)) && ((+).2 \text{ com } m := b,\ n := k) \\
&= \mathrm{compare}\ (a+k)\ (b+k) && (\mathrm{compare}.4 \text{ com } m := a+k,\ n := b+k) \\
&= \mathrm{compare}\ a\ b && ((\mathrm{HI}))
\end{aligned}$$

Obs: não tinha como fechar a **E2**, *devido um erro na* $(\cdot).2$ *na prova original.* ☹

Só isso mesmo.

Lemmata