FMC1, 2023.2
(Turma M56 do Thanos)

Prova IDMa.1
(points: 24; bonus: $0^{\flat}$; time: 42')

Nome: Θάνος **Gabarito**

2023-09-15

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC1})\,]$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la.*

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

XI. Respeite as restrições dos problemas que têm escolha.[3]

Dados. Os inteiros $(\mathbb{Z}; 0, 1, +, -, \cdot)$ com tipos:

$$0, 1 : \mathsf{Int} \qquad (+), (\cdot) : \mathsf{Int} \times \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \qquad (-) : \mathsf{Int} \to \mathsf{Int}$$

Axiomas.

`(ZA-Ass)`	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	`(ZM-Ass)`
`(ZA-IdR)`	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$	`(ZM-IdR)`
`(ZA-Com)`	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$	`(ZM-Com)`
`(ZA-InvR)`	$a + (-a) = 0$	$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	`(Z-DistR)`
`(Z-NZD)`	$a \cdot b = 0 \implies a = 0 \text{ ou } b = 0$		

Esclarecimento:

As demonstrações/refutações precisam ser na linguagem "low-level" que temos elaborado nas aulas. (Escreva apenas a parte de "código". *Não inclua* os Dados/Alvo no teu texto!) Podes—aliás, deves—utilizar as convenções e açúcares sintácticos que introduzimos para deixar teu código mais legível e mais curto. Na dúvida, pergunte.

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Respostas violando essa regra (respondendo em mais questões) tirarão 0 pontos.

(8) **A**

Usando os: $\to$, $\times$, (,), e os Var, Nat, Int, Real, String, Set, Prop, Cmd, Type, Person, City, Country, Lang atribua a tipagem que tu considera melhor para os seguinte:

Obs.: as linhas representam "buracos" ou "lacunas"; não é pra escrever nada nelas.

um amigo de ____ fala grego. : Person $\to$ Prop

____ fala ____ e mais ____ linguas fluentemente. : Person $\times$ Lang $\times$ Nat $\to$ Prop

Para todo ____: Int, ____. : Var $\times$ Prop $\to$ Prop

Seja x : ____ tal que $x = x$. : Type $\to$ Cmd

Suponha ____. : Prop $\to$ Cmd

Se ____, então _ + 1 é ____. : Prop $\times$ Int $\times$ (Int $\to$ Prop) $\to$ Prop

Como ____, logo ____ é par. : Prop $\times$ Int $\to$ Cmd

$n \leq m \overset{\text{def}}{\iff} (\exists k : \_)[$ ____ $]$: Type $\times$ Prop $\to$ Cmd

(8) **B**

Sejam P, Q, R proposições. Demonstre:

$$\big((P \,\&\, Q) \Rightarrow R\big) \implies \big((P \Rightarrow Q) \Rightarrow R\big) \text{ ou } \big(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)\big)$$

DEMONSTRAÇÃO.

Suponha $(P \,\&\, Q) \Rightarrow R$. (h)
Escolho o lado direito.
Suponha P (hp).
Suponha Q (hq).
Vou demonstrar $P \,\&\, Q$. (hpq)
    Parte P:
        Imediato pelo (hp).
    Parte Q:
        Imediato pelo (hq).
Aplique a (h) no (hpq) para obter R.

(8) **C** *Demonstre* ***exatamente uma*** *das* ***C1, C2.***

C1. Para qualquer inteiro a, $(-1)a = -a$.
C2. A lei de cancelamento multiplicativo dos inteiros:

$$(\forall a, b, u)\,[\,au = bu \implies a = b \text{ ou } u = 0\,].$$

DEMONSTRAÇÃO DA ÁMBAS .

C1. Seja a inteiro. Calculamos:

$$\begin{aligned} (-1)a &= -(1a) && (\texttt{(Z-NegProd)}\ 1\ a) \\ &= -a. && (\texttt{(ZM-IdL)}) \end{aligned}$$

C2. Sejam a, b, u inteiros tais que $au = bu$.
Logo $au + (-(bu)) = bu + (-(bu))$. $[(+(-(bu)))]$
Logo $au + (-(bu)) = 0$. [(ZA-InvR)]
Logo $au + (-b)u = 0$. [(Z-NegProd)]
Logo $(a + (-b))u = 0$. [(Z-DistR)]
Logo $a - b = 0$ ou $u = 0$. [(Z-NZD)]
Logo separo em casos.
Caso $a - b = 0$:
  Logo $a = b$. [(Z-DifZero)]
  Escolho a esquerda.
Caso $u = 0$:
  Escolho a direita.

Só isso mesmo.

LEMMATA

Z-ResR. $(\forall a, b)\,(\exists! x)[\,a + x = b\,]$.

DEMONSTRAÇÃO.
Existência.
  Testemunho $(-a) + b$.
  Calculamos:

$$\begin{aligned} &a + ((-a) + b) \\ &\quad = (a + (-a)) + b && (\texttt{(ZA-Ass)}) \\ &\quad = 0 + b && (\texttt{(ZA-InvR)}) \\ &\quad = b. && (\texttt{(ZA-IdL)}) \end{aligned}$$

Unicidade.
  Seja x tal que $a + x = b$.
  Calculamos:

$$\begin{aligned} &(-a) + b \\ &\quad = (-a) + (a + x) && (\text{pela escolha de } x) \\ &\quad = ((-a) + a) + x && (\texttt{(ZA-Ass)}) \\ &\quad = 0 + x && (\texttt{(ZA-InvL)}) \\ &\quad = x. && (\texttt{(ZA-IdL)}) \end{aligned}$$

Z-DifZero. $(\forall a, b)\,[\,a - b = 0 \implies a = b\,]$.

DEMONSTRAÇÃO.
Sejam a, b inteiros tais que $a - b = 0$.
Como $b - b = 0$, logo $a = b$ [pelo (Z-ResL)].

Z-AnnL. $(\forall a)\,[\,0a = 0\,]$.

DEMONSTRAÇÃO.
Seja a inteiro.
Calculamos:

$$\begin{aligned} 0a &= (0 + 0)a && (\texttt{(ZA-IdR)}) \\ &= 0a + 0a. && (\texttt{(Z-DistR)}) \end{aligned}$$

Logo $0a = 0$ pelo (Z-ResR), já que $0a + 0 = 0a$.

Z-NegProd. $(\forall a, b)\,[\,-(ab) = (-a)b\,]$.

DEMONSTRAÇÃO.
Sejam a, b inteiros.
Temos $ab + (-(ab)) = 0$ pelo (ZA-InvR).
Calculamos:

$$\begin{aligned} &ab + (-a)b \\ &\quad = (a + (-a))b && (\texttt{(Z-DistR)}\ b\ a\ (-a)) \\ &\quad = 0b && (\texttt{(ZM-IdR)}\ a) \\ &\quad = 0. && (\texttt{(Z-AnnL)}\ b) \end{aligned}$$

Logo $-(ab) = (-a)b$ pelo (ZA-ResR).

ZA-IdL.
$(\forall a)\,[\,0 + a = a\,]$.

Demonstração.
Seja a inteiro. Calculamos:

$$\begin{aligned} &0 + a \\ &\quad = a + 0 && (\texttt{(ZA-Com)}) \\ &\quad = a. && (\texttt{(ZA-IdR)}) \end{aligned}$$

ZM-IdL.
$(\forall a)\,[\,0a = a\,]$.

Demonstração.
Similar.

ZA-InvL.
$(\forall a)\,[\,(-a) + a = 0\,]$.

Demonstração.
Similar.

ZA-ResL.
$(\forall a, b)\,(\exists! x)[\,x + a = b\,]$.

Demonstração.
Similar.