(24) **A**

Demonstre **até uma** das:

(16) **A1.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.

(24) **A2.** Seja $(a_n)_n$ seqüência de reais crescente e sup-cotada. Demonstre que $(a_n)_n$ é convergente.

DEMONSTRAÇÃO DA A1 .

Suponha que o $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ é cotado.
Logo, seja M o supremum de $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$.
Como M é o supremum de $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$, logo $M-1$ não é uma cota de $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$.
Logo, seja $n \in \mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ tq $n > M-1$.
Como $n > M-1$, logo $n+1 > M$.
Temos que $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ é $(+1)$-Fechado, logo $n+1 \in \mathbb{R}_{\mathbb{N}}$.
Contradição [Pela escolha de M].

(24) **P**

Demonstre **até uma** das:

(18) **P1.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.

(24) **P2.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que existe real r tal que $r^2 = \vartheta$.

Dica: *Considere a seqüência $(t_n)_n$ definida pelas $t_0 = 0$; $t_{n+1} = t_n + \frac{1}{2}(\vartheta - t_n^2)$.*

DEMONSTRAÇÃO DA ____ .

(24) **C**

Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ seqüências de reais convergentes.

Demonstre **até uma** das:

(16) **C1.** $\lim_n(a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n$.

(24) **C2.** $\lim_n(a_n \cdot b_n) = \lim_n a_n \cdot \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA C1.

a_n é o n-ésimo membro da seqüência $(a_n)_n$.
...e para ser definido necessita tal n no escopo. Ou seja: a_n depende de n. $(a_n)_n$ não!

Sejam l_a e l_b os limites de $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$.
Sejam $a \in a_n$ e $b \in b_n$. ?!
Calculamos

$$
\begin{aligned}
d(a, l_a) + d(b, l_b) &= \cancel{|a - a_n| + |b - b_n|} = |a - l_a| + |b - l_b| && \text{[Pela definição de dist]} \\
&= \cancel{|a - a_n + b - b_n|} \geq |a - l_a + b - l_b| \\
&= \cancel{|a + b - a_n - b_n|} = |a + b - l_a - l_b| \\
&= \cancel{|(a+b) - (a_n + b_n)|} = |(a+b) - (l_a + l_b)| \\
&= \cancel{d(a+b,} \\
&= d(a+b, l_a + l_b). && \text{[Pela definição de distância]}
\end{aligned}
$$

Isso não faz sentido.
Reveja bem a definição de limite e o gabarito!

(8b) **D**

Desenha um diagrama cuja comutatividade afirma o **C1** acima.
RESPOSTA.

(24) **A**

Demonstre **até uma** das:

(16) **A1.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.

(24) **A2.** Seja $(a_n)_n$ seqüência de reais crescente e sup-cotada. Demonstre que $(a_n)_n$ é convergente.

DEMONSTRAÇÃO DA A2 .

Como $\{a_m\}_m$ habitado e sup-cotada logo seja $S = \sup\{a_m\}_m$ [Compl]

Demonstrarei $(a_m)_m \to S$.

Seja $\varepsilon > 0$.

Seja N t.q. $a_N > S - \varepsilon$. [$S - \varepsilon$ não é cota sup]

Asserção: $(\forall m \geq N)[d(a_m, S) < \varepsilon]$

Seja $m \geq N$.

Calc:

$$\begin{aligned} S - \varepsilon &< a_N \\ &\leq a_m && [(a_m)_m \text{ cresc}] \\ &\leq S && [\text{escolha do } S] \\ &< S + \varepsilon. \end{aligned}$$

logo $S - \varepsilon < a_m < S + \varepsilon$.

logo $-\varepsilon < a_m - S < \varepsilon$, ou seja, $|a_m - S| < \varepsilon$ ■

(24) **P**

Demonstre **até uma** das:

(18) **P1.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.

(24) **P2.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que existe real r tal que $r^2 = \vartheta$.

Dica: *Considere a seqüência $(t_n)_n$ definida pelas $t_0 = 0; t_{n+1} = t_n + \frac{1}{2}(\vartheta - t_n^2)$.*

DEMONSTRAÇÃO DA _____ .

(24) **C**

Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ seqüências de reais convergentes.

Demonstre **até uma** das:

(16) **C1.** $\lim_n(a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n$.

(24) **C2.** $\lim_n(a_n \cdot b_n) = \lim_n a_n \cdot \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA ____ .

(8[b]) **D**

Desenha um diagrama cuja comutatividade afirma o **C1** acima.

RESPOSTA.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \times \mathbb{R} \arrow[r, leftrightarrow, "?"] \arrow[d, "+"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathrm{Sig}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \arrow[d, "\oplus"] \\
\mathbb{R} \arrow[r, leftrightarrow] & \mathrm{Seq}(\mathbb{R})
\end{tikzcd}
$$

se é pra ser a pw-(+) então...

(34) **M**

Satisfaz dist

Sejam $\langle A\,;\,d_A\rangle, \langle B\,;\,d_B\rangle$ espaços métricos e $f : A \to B$.

$\mathcal{B}_\delta(a) = \{ x \mid d(a,x) < \delta \}$

Definição 1. Dizemos que f é *contínua* sse

$x : A$

$$(\forall a \in A)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \mathcal{B}_\delta(a))\,[\,f\ x \in \mathcal{B}_\varepsilon(f\ a)\,]$$

Definição 2. Dizemos que f é *seqüencialmente contínua* sse

$$(\forall a \in A)\,(\forall (a_n)_n \to a)\,[\,(f\ a_n)_n \to f\ a\,].$$

Teorema. f continua $\iff$ f seqüencialmente contínua.

DEMONSTRAÇÃO DA ($\Rightarrow$).

Suponha f contínua.
Sejam a e $(a_m)_m$ t.q $(a_m)_m \to a$.
Seja $\varepsilon > 0$.
Seja $\delta > 0$ t.q $(\forall x \in \mathcal{B}_\delta(a))[\, fx \in \mathcal{B}_\varepsilon(fa)\,]$.
Seja N t.q $(\forall n \geq N)[\, d(a_m, a) < \delta/2\,]$. desnecessário...
Asserção: $(\forall n \geq N)[\, d(fa_m, fa) < \varepsilon\,]$
Seja $m \geq N$.
Temos $d(a_m, a) < \delta/2$. ...pois...
Logo $f a_m \in \mathcal{B}_\varepsilon(fa)$. $[\,d(a_m, a) < \boxed{\delta/2 < \delta}\,]$
Logo $d(fa_m, fa) < \varepsilon$ ∎

Só isso mesmo.

(24) **A**

Demonstre **até uma** das:

(16) **A1.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.

(24) **A2.** Seja $(a_n)_n$ seqüência de reais crescente e sup-cotada. Demonstre que $(a_n)_n$ é convergente.

DEMONSTRAÇÃO DA A2 .

Seja s uma cota superior de $(a_n)_n$.

Seja $\varepsilon > 0$.

Não! O que significa crescente?

Como $(a_n)_n$ é crescente, logo $(\exists t)[a_t = s]$ [não sei]

[aparentemente]

vou demonstrar $(\forall n \geq t)[d(a_n, \ell) < \varepsilon]$

⋮

vai?

nope!

(24) **P**

Demonstre **até uma** das:

(18) **P1.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.

(24) **P2.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que existe real r tal que $r^2 = \vartheta$.

Dica: *Considere a seqüência $(t_n)_n$ definida pelas $t_0 = 0; t_{n+1} = t_n + \frac{1}{2}(\vartheta - t_n^2)$.*

DEMONSTRAÇÃO DA ____ .

$$(a_n)_n \to a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n \geq N)\left[d(a_n, a) < \varepsilon\right]$$

(34) **M**

Sejam $\langle A \,;\, d_A \rangle, \langle B \,;\, d_B \rangle$ espaços métricos e $f : A \to B$.

Definição 1. Dizemos que f é *contínua* sse

$$(\forall a \in A)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \mathcal{B}_\delta(a))\,[\, f\, x \in \mathcal{B}_\varepsilon(f\ a)\,]$$

Definição 2. Dizemos que f é *seqüencialmente contínua* sse

$$(\forall a \in A)\,(\forall (a_n)_n \to a)\,[\,(f\ a_n)_n \to f\ a\,].$$

Teorema. f continua $\iff$ f seqüencialmente contínua.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n \geq N)\left[d((f a_n)_n, f a) < \varepsilon\right]$$

DEMONSTRAÇÃO DA $(\Rightarrow)$.

Suponha que f é contínua. [1]

Seja $a \in A$.

Seja $(a_n)_n \to a$. [2]

Seja $\varepsilon = \varepsilon_1$. X não há ε_1 no escopo!

```
int x = y;
int x ;
```

Seja N. qual o sentido disso?

Seja $\varepsilon > 0$.

Vou demonstrar $(\forall n \geq N)\left[d((f a_n)_n, f a) < \varepsilon\right]$.

Seja n.

Como $(a_n)_n \in \mathcal{B}_{\varepsilon_1}(a)$, logo $(f\ a_n)_n \in \mathcal{B}_\varepsilon(f a)$. [Pela 2 e 1]

Logo $d(f a, (f a_n)_n) < \varepsilon$.

Logo $d((f a_n)_n, f a) < \varepsilon$. ∎ [Dist. Sim]

Só isso mesmo.

(24) **A**

isso precisa ser justificado

Demonstre **até uma** das:

(16) **A1.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.

(24) **A2.** Seja $(a_n)_n$ seqüência de reais crescente e sup-cotada. Demonstre que $(a_n)_n$ é convergente.

DEMONSTRAÇÃO DA A2 .

Suponha $(a_n)_n$ crescente e sup. cotada.

Seja $\varepsilon > 0$.

Seja S o supremum de $(a_n)_n$.

Logo Seja $a_N > S - \varepsilon$. «Seja —(...)» precisa ser seguido por variável.

Vou demonstrar que $(\forall n \geq N)[d(a_n, S) < \varepsilon]$ Aqui era pra ser: «Seja N t.q. $a_N > S - \varepsilon$.»

Seja $n \geq N$.

calculamos:

$S - \varepsilon < a_N$

$\leq a_n$ [Seq. crescente]

Logo, $S - \varepsilon < a_n$?!

~~Logo $|S - \varepsilon + \varepsilon$~~ Logo, $|S - a_n| < \varepsilon$

Logo $d(a_n, S) < \varepsilon$.

(24) **P**

Demonstre **até uma** das:

(18) **P1.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.

(24) **P2.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que existe real r tal que $r^2 = \vartheta$.

Dica: Considere a seqüência $(t_n)_n$ definida pelas $t_0 = 0; t_{n+1} = t_n + \frac{1}{2}(\vartheta - t_n^2)$.

DEMONSTRAÇÃO DA ____ .

~~Considere a seq. $(t_n)_n$ t.q. $t_0 = 0$ & $t_{n+1} = t_n + \frac{1}{2}(\vartheta - t_n^2)$~~

(24) **C**

Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ seqüências de reais convergentes.

Demonstre **até uma** das:

(16) **C1.** $\lim_n(a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n$.
(24) **C2.** $\lim_n(a_n \cdot b_n) = \lim_n a_n \cdot \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA C1 .

Suponha $(a_n)_n \to a$ & $(b_n)_n \to b$.

Seja $\varepsilon > 0$.

Seja N_a t.q $(\forall n \geq N_a)[d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}]$

Seja N_b t.q $(\forall n \geq N_b)[d(b_n, b) < \frac{\varepsilon}{2}]$

Seja $N = \max(N_a, N_b)$.

vou demonstrar que $(\forall n \geq N)[d((a_n+b_n), (a+b)) < \varepsilon]$.

Seja $n \geq N$.

calculamos:

$$\begin{aligned} d((a_n+b_n),(a+b)) &= |(a_n+b_n)-(a+b)| \\ &= |(a_n-a)+(b_n-b)| \\ &\leq |a_n-a| + |b_n-b| \\ &= d(a_n,a) + d(b_n,b) \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

(8♭) **D**

Desenha um diagrama cuja comutatividade afirma o **C1** acima.

RESPOSTA.

Não faz sentido começar assim.
Qual teu alvo neste momento? $(\exists \ell)[\dots]$.
Não é $(\forall \varepsilon > 0)[\dots]$.

(24) **A**

Demonstre **até uma** das:

(16) **A1.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.

(24) **A2.** Seja $(a_n)_n$ seqüência de reais crescente e sup-cotada. Demonstre que $(a_n)_n$ é convergente.

DEMONSTRAÇÃO DA A2.

Seja $\varepsilon > 0$.
Seja S ~~o~~ supremo de $(a_m)_m$. [Completude]
Seja N tal que $a_N < S - \varepsilon$.
Vou mostrar que $(\forall m \geq N)[d(a_m, S) < \varepsilon]$
Seja $m \geq N$.
Calculamos:

$$\begin{aligned} S - \varepsilon &< a_N \\ &\leq a_m && [(a_m)_m \text{ é crescente}] \\ &\leq S && [\text{Pela escolha de } S] \\ &< S + \varepsilon \end{aligned}$$

Como $a_m < S + \varepsilon$, logo $a_m - S < \varepsilon$.
Logo $|a_m - S| < \varepsilon$??
Logo $d(a_m, S) < \varepsilon$ [Definição de distância]

(24) **P**

Demonstre **até uma** das:

(18) **P1.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.

(24) **P2.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que existe real r tal que $r^2 = \vartheta$.

Dica: *Considere a seqüência* $(t_n)_n$ *definida pelas* $t_0 = 0$; $t_{n+1} = t_n + \frac{1}{2}(\vartheta - t_n^2)$.

DEMONSTRAÇÃO DA ____.

(24) C

Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ seqüências de reais convergentes.

Demonstre **até uma** das:

(16) **C1.** $\lim_n(a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n$.
(24) **C2.** $\lim_n(a_n \cdot b_n) = \lim_n a_n \cdot \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA C2 .

Seja $a = \lim_n a_n$.

Seja a limite de $(a_n)_n$.
Seja b limite de $(b_n)_n$.
Seja $\varepsilon > 0$. Seja S o supremo de $(b_n)_n$.

por que existe? E por que supremum e não uma cota, apenas?

Seja N_a tal que $(\forall n \geq N_a)[d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2|S|}]$ (1)
Seja N_b tal que $(\forall n \geq N_b)[d(b_n, b) < \frac{\varepsilon}{2|a|}]$ (2)

$\neq 0$?

Seja $N = \max\{N_a, N_b\}$
Vou mostrar que $(\forall n \geq N)[d(a_n \cdot b_n, a \cdot b) \boxed{< 3}]$

distância amada 🥲

Seja $n \geq N$.
Calculamos:

$$
\begin{aligned}
d(a_n \cdot b_n, a\cdot b) &= |a_n \cdot b_n - a \cdot b| && [\text{Def. Distância}]\\
&= |a_n \cdot b_n - a \cdot b + ab_n - ab_n| && [ab_n - ab_n = 0 = (+) - Id_n]\\
&= |b_n(a_n - a) + a(b_n - b)| && [\text{Distributividade}]\\
&\leq |b_n(a_n - a)| + |a(b_n - b)| && [\text{Desigualdade triangular}]\\
&\leq |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b| && ??\\
&< |b_n||a_n - a| + |a|\frac{\varepsilon}{2|a|} && [\text{Por } (2)]\\
&< |b_n||a_n - a| + \frac{\varepsilon}{2}\\
&< |b_n|\frac{\varepsilon}{2|S|} + \frac{\varepsilon}{2} && [\text{Por } (1)]\\
&< |S|\frac{\varepsilon}{2|S|} + \frac{\varepsilon}{2} && [\text{Pela escolha de } S]\\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

epsilon ≠ três

($8^\flat$) D

Desenha um diagrama cuja comutatividade afirma o **C1** acima.
RESPOSTA.

Tentou juntar uso de dois dados numa maneira improvisada e com certeza injustificável pela justificativa escrita.

Ache um nome desocupado!

(24) **C**

Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ seqüências de reais convergentes. [H l]

Demonstre até uma das:

(16) **C1.** $\lim_n(a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n$.

(24) **C2.** $\lim_n(a_n \cdot b_n) = \lim_n a_n \cdot \lim_n b_n$.

e se $b=0$?

matemática é case sensitive

Demonstração da C_2.

Sejam a, v reais os $\lim_m a_m$ e $\lim_m v_m$, respectivamente [por Hl]

Seja ε positivo ">0" !!

~~Sejam $N_1, N_2 \in \mathbb{R}_N$ tais que $(\forall m > N_1)\left[d(a_m, a) < \frac{\varepsilon}{|a_m|}\right]$ e $(\forall m > N_2)\left[d(v_m, v) < \varepsilon\right.$~~

Sejam $N_1, N_2 \in \mathbb{R}_N$ tais que $(\forall m > \max(N_1, N_2))\left[d(a_m, a) < \frac{\varepsilon}{2|v|} \;\&\; d(v_m, v) < \frac{\varepsilon}{2|a_m|}\right]$ [por Hl]

~~Seja~~ Demonstrarei que $(\forall n > \max(N_1, N_2))\left[d(a_m v_m, av) < \varepsilon\right]$

isso não é um b

Seja n real maior que $\max(N_1, N_2)$ $n > \max(N_1, N_2)$.

Calculamos

$d(a_m v_m, av)$

$= |a_m v_m - av|$

$= |a_m v_m + a_m v - a_m v - av|$ ~~[somando $0 = a_m v - a_m v$]~~

$= |a_m(v_m - v) + v\cdot(a_m - a)|$ [simpl. e distrL]

$\leq a_m||v_m - v| + |v||a_m - a|$ praticamente a única que precisa justificar.

$= |a_m| d(v_m, v) + |v| d(a_m, a) < \frac{|a_m| \cdot \varepsilon}{2|a_m|} + \frac{|v| \cdot \varepsilon}{2|v|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. QED.

[escolha de N_1, N_2]

(8[b]) **D**

Desenha um diagrama cuja comutatividade afirma o **C1** acima.

Resposta.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Seq}\,\mathbb{R} \times \mathrm{Seq}\,\mathbb{R} \arrow[r, "\oplus_{\mathrm{Seq}}"] \arrow[d, "\lim \times \lim"] & \mathrm{Seq}\,\mathbb{R} \arrow[d, "\lim"] \\
\mathrm{MaVue}\,\mathbb{R} \times \mathrm{MaVue}\,\mathbb{R} \arrow[r, "\oplus_{\mathrm{MaVue}\,\mathbb{R}}"] & \mathrm{MaVue}\,\mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

(34) **M**

Sejam $\langle A\,;\,d_A\rangle, \langle B\,;\,d_B\rangle$ espaços métricos e $f : A \to B$.

Definição 1. Dizemos que f é *contínua* sse

$$(\forall a \in A)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \mathcal{B}_\delta(a))\,[\,f\,x \in \mathcal{B}_\varepsilon(f\,a)\,]$$

Definição 2. Dizemos que f é *seqüencialmente contínua* sse

quem disse que são reais?

$$(\forall a \in A)\,(\forall (a_n)_n \to a)\,[\,(f\,a_n)_n \to f\,a\,].$$

Teorema. f continua $\iff$ f seqüencialmente contínua.

DEMONSTRAÇÃO DA ($\Rightarrow$).

Suponha f contínua (Hf)

Sejam $a \in A$ real e $(a_n)_n$ sequência real t.q. $(a_n)_n \to a$ (Ha)

Seja ε ~~real positivo~~ > 0.

Pela $\boxed{(\text{Hf } a\ \varepsilon)}$, seja δ ~~real positivo~~ t.q. $(\forall x \in B_\delta(a))\,[f\,x \in B_\varepsilon(f\,a)]$

Como $(a_n)_n \to a$, sejam N e $n > N$ t.q. a_n é ε-perto de a

$\boxed{\text{Faça } \delta = \varepsilon}$

Logo, $a_n \in B_\delta(a)$

Logo, $f\,a_n \in B_\varepsilon(f\,a)$

Ou seja, $f\,a_n$ e $f\,a$ são ε-perto. Sim mas...

QED

(MID+)-LEVEL!!

quem se importa com um a_n'zinho na vida? (não arbitrário!!)

Fazemos ações, comidas,...
Proposições não.

Aqui nem proposição é, e nem teria como ser, já que sequer há δ no escopo.
Era pra ser um declaração & definição.
Era pra ser «Seja $\delta = \varepsilon$.»

Só isso mesmo.

E mesmo assim, ainda seria no mínimo inútil, já que já temos um nome para o real ε: ε!

(24) **A**

Demonstre **até uma** das:

(16) **A1.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.

(24) **A2.** Seja $(a_n)_n$ seqüência de reais crescente e sup-cotada. Demonstre que $(a_n)_n$ é convergente.

Demonstração da A2 .

Seja $\varepsilon > 0$.

Seja S supremo de $(a_n)_n$ [(~~Solicito graças ao~~ compl.)]

Seja N tal que $a_N > S - \varepsilon$.

Vou demonstrar que $(\forall n \geq N)[d(a_n, S) < \varepsilon]$.

Seja n Nat.

Calculamos:

$$
\begin{aligned}
& S - \varepsilon \\
& < a_N && [(\text{Escolha de } N)] \\
& \leq a_n && [((a_n)_n \text{ é crescente})] \\
& \leq S && [(S \text{ é supremo})] \\
& < S + \varepsilon
\end{aligned}
$$

Logo $a_n \in B_\varepsilon(S)$. ■ Q.E.D

(24) **P**

Demonstre **até uma** das:

(18) **P1.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.

(24) **P2.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que existe real r tal que $r^2 = \vartheta$.

Dica: Considere a seqüência $(t_n)_n$ definida pelas $t_0 = 0$; $t_{n+1} = t_n + \frac{1}{2}(\vartheta - t_n^2)$.

Demonstração da ____ .

Pelo contrário!
Este é exatamente o ponto que tu parou de ficar usando a especificação

(24) C

Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ seqüências de reais convergentes.

Demonstre **até uma** das:

(16) **C1.** $\lim_n(a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n$.
(24) **C2.** $\lim_n(a_n \cdot b_n) = \lim_n a_n \cdot \lim_n b_n$.

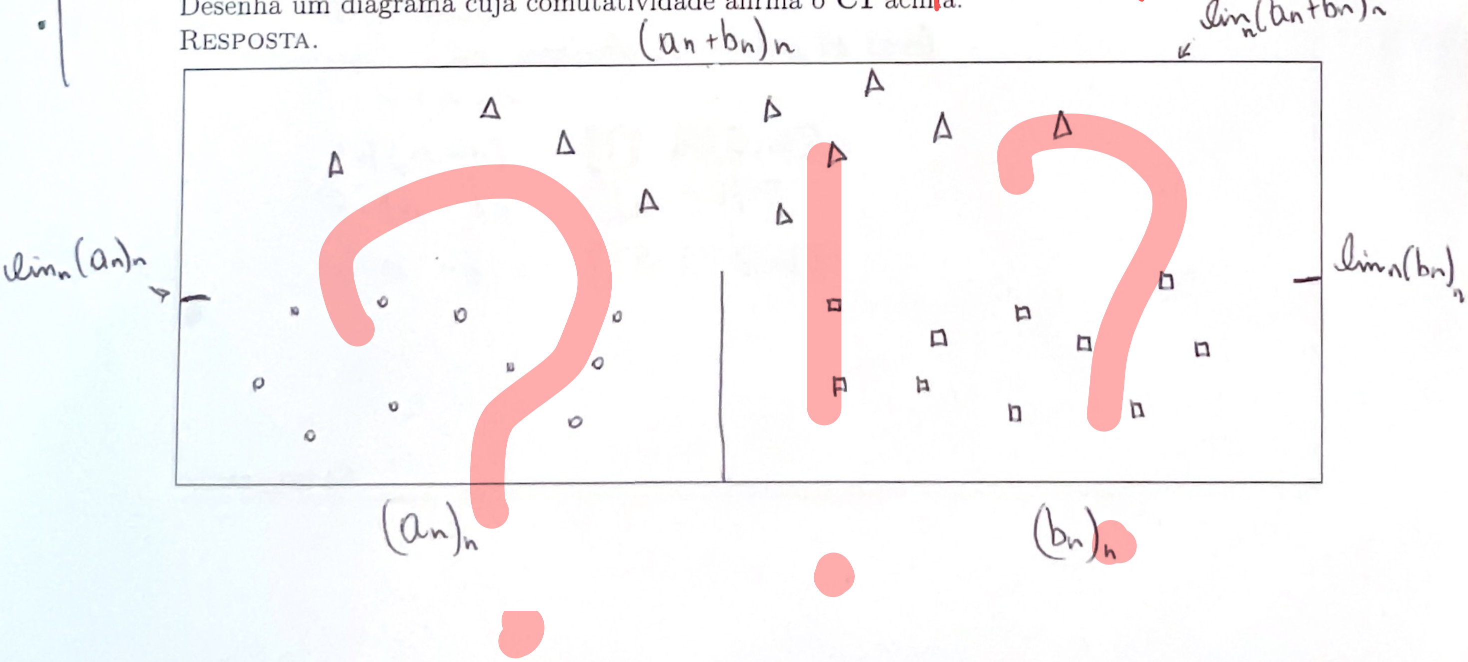
DEMONSTRAÇÃO DA C1 .

Sejam a, b Reais tq $(a_n)_n \to a$ e $(b_n)_n \to b$.
Seja $\varepsilon > 0$.
Seja N_a t.q $(\forall n \geq N_a)[d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}]$. (Φ)
Seja N_b t.q $(\forall n \geq N_b)[d(b_n, b) < \frac{\varepsilon}{2}]$. $(*)$
Seja N o máximo de $\{N_a, N_b\}$.
~~Seja n Na:~~ Vou demonstrar que $(\forall n \boxed{\geq N})[d((a_n+b_n),(a+b)) < \varepsilon]$. Seja n N+
Calculamos: ~~(Usos implícitos de RA-Ass; RA-Com)~~

$d(a_n + b_n, a+b)$
$= |(a_n + b_n) - (a+b)|$ [(Especificação de métrica)]
$= |(a_n + b_n) - a - b|$ ~~[(R-NegAdd)]~~
$= |(a_n - a) + (b_n - b)|$
$\leq |a_n - a| + |b_n - b|$ [(Desigualdade Triangular)]
$= d(a_n, a) + d(b_n, b)$ [+ (Especificação de métrica)]
$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ [(Φ); (*)] e era pra ser pela
! * escolha de n também,
$\overset{!}{=}$ $<$ ε. se tivesse sido escolhido
para ser(≥N)...

(8[b]) D ■ Q.E.D

Desenha um diagrama cuja comutatividade afirma o **C1** acima.
RESPOSTA.



(24) **A**

Demonstre **até uma** das:

(16) **A1.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.

(24) **A2.** Seja $(a_n)_n$ seqüência de reais crescente e sup-cotada. Demonstre que $(a_n)_n$ é convergente.

DEMONSTRAÇÃO DA A2 .

Seja $S = \sup (a_n)_n$. (Axioma da completude) & $(a_n)_n$ sup cotada!

Vou demonstrar que $(a_n)_n \to S$.

Seja $\varepsilon > 0$.

Seja N t.q. $a_N > S - \varepsilon$. ← precisa justificar!

Vou demonstrar $(\forall n \geq N)[d(a_n, S) < \varepsilon]$.

Seja $n \geq N$.

Calculamos:

$S - \varepsilon < a_N$

$\leq a_n$ [a sequência é crescente]

$\leq S$ [S é a melhor das cotas superiores]

$< S + \varepsilon$

Como $S - \varepsilon < a_n < S + \varepsilon$, logo $-\varepsilon < a_n - S < \varepsilon$, logo $|a_n - S| < \varepsilon$.

Portanto, $d(a_n, S) < \varepsilon$. ∎

(24) **P**

Demonstre **até uma** das:

(18) **P1.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.

(24) **P2.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que existe real r tal que $r^2 = \vartheta$.

Dica: *Considere a seqüência* $(t_n)_n$ *definida pelas* $t_0 = 0; t_{n+1} = t_n + \frac{1}{2}(\vartheta - t_n^2)$.

DEMONSTRAÇÃO DA ____ .

Cuidado: escrevendo frações, a $\frac{\cdot}{\cdot}$ deve ser alinhada no mesmo nível do $:, -, +,$ etc.

(24) **C**

Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ seqüências de reais convergentes.

Demonstre **até uma** das:

(16) **C1.** $\lim_n (a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n$.
(24) **C2.** $\lim_n (a_n \cdot b_n) = \lim_n a_n \cdot \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA C2.

precisa cotada aqui!

Seja $\varepsilon > 0$. Seja $S = \sup (b_n)_n$. (axioma da completude) ✗
Seja N_a t.q. $(\forall n \geq N_a)\left[d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2|S|}\right]$. ~
Seja N_b t.q. $(\forall n \geq N_b)\left[d(b_n, b) < \frac{\varepsilon}{2|a|}\right]$. $\neq 0$?
Seja $N = \max(N_a, N_b)$. ✓
Vou demonstrar que $(\forall n \geq N)[d(a_n b_n, ab) < \varepsilon]$. ✓
Seja $n \geq N$. ✓
Calculamos:

$$
\begin{aligned}
d(a_n b_n, ab) &= |a_n b_n - ab| \quad ✓\\
&= |a_n b_n - ab + ab_n - ab_n| \quad ✓\\
&= |b_n(a_n - a) + a(b_n - b)| \quad ✓\\
&\leq |b_n(a_n - a)| + |a(b_n - b)| \quad ✓\\
&\leq |S(a_n - a)| + |a(b_n - b)| \quad ✓\\
&= |S||a_n - a| + |a||b_n - b|\\
&< \boxed{|S| \cdot \frac{\varepsilon}{2|S|} + |a| \cdot \frac{\varepsilon}{2|a|}} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

yikes!

(setas entre pontos tem "bunda": $\mapsto$)

(8♭) **D**

Desenha um diagrama cuja comutatividade afirma o **C1** acima.
RESPOSTA.

$\oplus$ → Adição em elementos da listas (pointwise) nas respectivas posições.

$$
\begin{tikzcd}
((a_n)_n, (b_n)_n) \arrow[r, "\oplus"] \arrow[d, "\lim_n"'] & (a_n + b_n)_n \arrow[d, "\lim_n"] \\
(\lim_n(a_n), \lim_n(b_n)) \arrow[r, "+"] & (a + b)
\end{tikzcd}
$$

A idéia é essa, mas:
um dos "pontos" principais dos diagramas comutativos é que comunicamos "sem pontos". Aqui nos vertices em vez de conjuntos/tipos tu botou pontos.

2

(24) **A**

Demonstre **até uma** das:

(16) **A1.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.

(24) **A2.** Seja $(a_n)_n$ seqüência de reais crescente e sup-cotada. Demonstre que $(a_n)_n$ é convergente.

DEMONSTRAÇÃO DA A2 .

Seja $(a_n)_n$ uma sequência de reais, tal que, $(a_n)_n$ é crescente e sup-cotada.

Como $(a_n)_n$ é crescente, logo é habitada. ✗ o que tem a ver?!

Como $(a_n)_n$ é habitada e cotada por cima, pela completude, $(a_n)_n$ possui supremum. ✓

Seja s o supremum de $(a_n)_n$. ✓

Seja $\varepsilon > 0$. ✓ o que é isso e cadê o tal índice dele?

Seja N o índice de s', tal que, $s' = s - 1$. ← s-1 é de interesse aqui?

Seja n, tal que $n = N$. ← isso nunca faz sentido!

Calculamos:

$$\begin{aligned} d(a_n, s) &= d(s', s) \\ &= d(s, s') \quad ??, \\ &= |s - (s-1)| \\ &= |+1| \end{aligned}$$

Continua no lemmata

(24) **P**

Demonstre **até uma** das:

(18) **P1.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.

(24) **P2.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que existe real r tal que $r^2 = \vartheta$.

Dica: Considere a seqüência $(t_n)_n$ definida pelas $t_0 = 0$; $t_{n+1} = t_n + \frac{1}{2}(\vartheta - t_n^2)$.

DEMONSTRAÇÃO DA P2 .

Seja $0 < \vartheta < 1$ uma sequência, tal que, $t_0 = 0$ e $t_{n+1} = t_n + \frac{1}{2}(\vartheta - t_n^2)$.

Temos que ela é crescente e sup-cotada (Q.2) e (Q.3).

Logo, pelo MCT, ela converge.

Seja l o valor que essa sequência converge.

Calculamos:

$$\begin{aligned} l &\overset{\dots}{=} \lim_n (t_n + 1) \quad ? \\ &\overset{\dots}{=} \lim_n (t_n) + \lim_n \left(\tfrac{1}{2}(\vartheta - t_n^2)\right) && [\text{def } (t_n)_n] \\ &= l + \lim_n \left(\tfrac{1}{2}(\vartheta - t_n^2)\right) && [\lim_n (n+1) = \lim_n (n)] \\ &= l + \tfrac{1}{2}\left(\lim_n (\vartheta - t_n^2)\right) && [Q.1] \\ &= l + \tfrac{1}{2}\left(\lim_n \vartheta - \lim_n t_n^2\right) && [\lim (a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n] \end{aligned}$$

Continua no lemmata

não. (nem aqui)

Leia teu código. O ε não tem nada a ver com... nada!

A_2 - Continuação

$$= |1+1|$$
$$= 1.$$

Como $1>0$, logo, $\varepsilon > 1$.

?

$(2.1)\ (\forall (c_n)_n \text{ constante})[(c_n)_n \to c]$

Seja $(c_n)_n$ uma sequência constante.

Seja $\varepsilon > 0$.

Seja N um índice dessa sequência.

Seja $n = N$.

Calculamos

$$d(c_n, c) = |c_n - c|$$
$$= |c - c|$$
$$= 0.$$

Como $\varepsilon > 0$, logo $(c_n)_n \to c$.

é o quê?!

P_2 - Continuação

$$= l + \tfrac{1}{2}(\lim_n v - \lim_n t_n^2)$$
$$= l + \tfrac{1}{2} \cdot (v - t_n^2). \ [2.1]$$

quem é n?

Logo, $l = l + \tfrac{1}{2}(v - t_n^2)$.

Logo, $0 = \tfrac{1}{2}(v - t_n^2)$.

Logo, $0 = v - t_n^2$.

Logo, $t_n^2 = v$. Qual era teu alvo mesmo?

onde tu precisou algo sobre constantes mesmo?

(24) **A**

Demonstre **até uma** das:

(16) **A1.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.

(24) **A2.** Seja $(a_n)_n$ seqüência de reais crescente e sup-cotada. Demonstre que $(a_n)_n$ é convergente.

DEMONSTRAÇÃO DA A2 .

Seja $\varepsilon > 0$,
Seja s o supremum de $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ ($\mathbb{R}$-compl) (+1)-fechado
calculamos
$d(a_n, s) = |a_n - s|$?!

(24) **P**

Demonstre **até uma** das:

(18) **P1.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.

(24) **P2.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que existe real r tal que $r^2 = \vartheta$.

Dica: *Considere a seqüência* $(t_n)_n$ *definida pelas* $t_0 = 0;\ t_{n+1} = t_n + \frac{1}{2}(\vartheta - t_n^2)$.

DEMONSTRAÇÃO DA ____ .

(24) **C**

Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ seqüências de reais convergentes.

Demonstre **até uma** das:

(16) **C1.** $\overset{l}{\lim_n}(a_n + b_n) = \overset{l_a}{\lim_n} a_n + \overset{l_b}{\lim_n} b_n$.

(24) **C2.** $\lim_n(a_n \cdot b_n) = \lim_n a_n \cdot \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA C_1 . donde tirou que $(a_n+b_n)_n$ é convergente?

$\boxed{\text{Seja } \lim_m (a_m+b_m) = l}$

$\lim_m(a_m) = l_a$

e $\lim_m(b_m) = l_b$.

$d(a_{\boxed{m}}, l_a) = |a_m - l_a|$; quem é?

$d(b_{\boxed{m}}, l_b) = |b_m - l_b|$;

Calculamos

$$\begin{aligned}
&d(a_m+b_m, l) \\
&= |a_m+b_m-l| = |a_m+b_m-l+l_a-l_a+l_b-l_b| \\
&= |(a_m-l_a)+(b_m-l_b)+l_a+l_b-l| \\
&= |[(a_m-l_a)+(b_m-l_b)]+(l_a+l_b-l)| \\
&\le |(a_m-l_a)+(b_m-l_b)| + |l_a+l_b-l| \\
&\le |a_m-l_a|+|b_m-l_b| + |l_a+l_b-l| \\
&\le d(a_m,l_a)+d(b_m,l_b) + |l_a+l_b-l|
\end{aligned}$$

(8♭) **D**

Desenha um diagrama cuja comutatividade afirma o **C1** acima.

RESPOSTA.

(24) **A**

Demonstre **até uma** das:

(16) **A1.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.

(24) **A2.** Seja $(a_n)_n$ seqüência de reais crescente e sup-cotada. Demonstre que $(a_n)_n$ é convergente.

DEMONSTRAÇÃO DA A2.

Seja $S = \sup\{a_n\}_n$ [(R-compl)] ← precisa

Vou demonstrar que $(a_n)_n \to S$

Seja $\varepsilon > 0$

Logo seja N t.q. $a_N > S - \varepsilon$

Vou demonstrar que $(\forall n > N)[d(a_n, S) < \varepsilon]$

Seja $n > N$

Calculemos

$$\begin{aligned} S - \varepsilon &< a_N \\ &\leq a_n \quad [\text{seq crescente e escolha de } n] \\ &\leq S \\ &< S + \varepsilon \end{aligned}$$

Temos $S - \varepsilon < a_n < S + \varepsilon$

Logo $-\varepsilon < a_n - S < \varepsilon$

Logo $|a_n - S| < \varepsilon$

Logo $d(a_n, S) < \varepsilon$

(24) **P**

Demonstre **até uma** das:

(18) **P1.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.

(24) **P2.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que existe real r tal que $r^2 = \vartheta$.

Dica: Considere a seqüência $(t_n)_n$ definida pelas $t_0 = 0$; $t_{n+1} = t_n + \frac{1}{2}(\vartheta - t_n^2)$.

DEMONSTRAÇÃO DA ____.

(24) **C**

Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ seqüências de reais convergentes.

Demonstre **até uma** das:

(16) **C1.** $\lim_n(a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n$.
(24) **C2.** $\lim_n(a_n \cdot b_n) = \lim_n a_n \cdot \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA C2.

Seja a t.q $\lim_n a_n = a$

Seja $a = \lim_n a_n$.

Seja b t.q $\lim_n b_n = b$

Seja $\varepsilon > 0$

Logo seja N_a t.q $(\forall n > N_a)\left[d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2|b|}\right]$

$\neq 0$?

Seja M t.q $(\forall n)[-M < a_n < M]$ [g. conv ⇒ cotada]

(por que não briguei aqui?)

Logo seja N_b t.q $(\forall n > N_b)\left[d(b_n, b) < \frac{\varepsilon}{2M}\right]$

Vou demonstrar que $(\forall n > \max(N_a, N_b))\left[d(a_n b_n, ab) < \varepsilon\right]$

Seja $n > \max(N_a, N_b)$

Calc

$$
\begin{aligned}
d(a_n b_n, ab) &= |a_n b_n - ab| \\
&= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\
&= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \\
?\ &\leq |a_n(b_n - b)| + |b(a_n - a)| \quad [\text{triang}] \\
&= |a_n|\,|b_n - b| + |b|\,|a_n - a| \\
&= |a_n|\, d(b_n, b) + |b| \cdot d(a_n, a) \\
&< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |b| \cdot \frac{\varepsilon}{2|b|} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

(8[b]) **D**

Desenha um diagrama cuja comutatividade afirma o **C1** acima.
RESPOSTA.

$$
\begin{tikzcd}
((a_n)_n, (b_n)_n) \arrow[r, "\lim \times \lim"] \arrow[d, "\oplus"'] & (\lim_n a_n, \lim_n b_n) \arrow[d, "+"] \\
(a_n + b_n)_n \arrow[r, "\lim"] & \lim_n(a_n + b_n) = \lim_n(a_n) + \lim_n(b_n)
\end{tikzcd}
$$

$\oplus : \mathrm{Seq}(\mathrm{Real}) \times \mathrm{Seq}(\mathrm{Real}) \to \mathrm{Seq}(\mathrm{Real})$
↳ pw

$+ : (\mathrm{Real} \times \mathrm{Real}) \to \mathrm{Real}$

$\lim : \mathrm{Seq}(\mathrm{Real}) \to \mathrm{Real}$

(Veja umas páginas atrás!)

(24) **A**

Demonstre **até uma** das:

(16) **A1.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_\mathbb{N}$ dos reais naturais não é cotado.

(24) **A2.** Seja $(a_n)_n$ seqüência de reais crescente e sup-cotada. Demonstre que $(a_n)_n$ é convergente.

DEMONSTRAÇÃO DA A1.

Suponha $\mathbb{R}_\mathbb{N}$ é cotado.
Como $\mathbb{R}_\mathbb{N}$ é cotado e habitado, logo, pelo (R-compl), $\mathbb{R}_\mathbb{N}$ possui supremum.
Logo, seja M supremum de $\mathbb{R}_\mathbb{N}$.
Como M é supremum de $\mathbb{R}_\mathbb{N}$ temos que $M-1$ não é cota de $\mathbb{R}_\mathbb{N}$.
Logo, $(\exists n \in \mathbb{R}_\mathbb{N})[n > M-1]$.
seja $n \in \mathbb{R}_\mathbb{N}$ tq. $n > M-1$.
Como $n \in \mathbb{R}_\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}_\mathbb{N}$ é $(+1)$-fechado, logo $n+1 > M$.
Logo, contradição.

(24) **P**

Demonstre **até uma** das:

(18) **P1.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.

(24) **P2.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que existe real r tal que $r^2 = \vartheta$.

Dica: *Considere a seqüência $(t_n)_n$ definida pelas $t_0 = 0; t_{n+1} = t_n + \frac{1}{2}(\vartheta - t_n^2)$.*

DEMONSTRAÇÃO DA _____ .

errado usar artigo definido aqui.
Se um conjunto de reais é cotado, então tem uma infinidade de cotas.

(24) **C**

Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ seqüências de reais convergentes.

Demonstre **até uma** das:

(16) **C1.** $\lim_n(a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n$.
(24) **C2.** $\lim_n(a_n \cdot b_n) = \lim_n a_n \cdot \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA C2 .

Sejam a e b reais tq. $(a_n)_n \to a$ e $(b)_n \to b$.
Seja $\varepsilon > 0$.
Como $(b_n)_n$ é convergente, logo $(b_n)_n$ é cotada.
Logo, seja M ~~a~~ uma cota de $(b_n)_n$.
Seja Na natural tq. $(\forall n \geq Na)[d(a_n, a) < \varepsilon/2|b|]$ $\neq 0$?
Seja Nb natural tq. $(\forall n \geq Nb)[d(b_n, b) < \varepsilon/2M]$
Seja $N := \max(Na, Nb)$.
Seja $n \geq N$.
Calculamos:

$$\begin{aligned} d(a_nb_n, ab) &= |a_nb_n - (ab)| \\ &= |a_nb_n + a_nb - a_nb - (ab)| \\ &= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \\ &\leq |a_n(b_n - b)| + |b(a_n - a)| \\ &= |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \\ &= |a_n| d(b_n, b) + |b| d(a_n, a) \\ &< M \cdot d(b_n, b) + |b| d(a_n, a) \\ &= M \cdot \varepsilon/2M + |b| \varepsilon/2|b| = \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

(8♭) **D**

Desenha um diagrama cuja comutatividade afirma o **C1** acima.
RESPOSTA.

$d(a_n b_n, ab) < \varepsilon$

$|a_n b_n - ab|$

$|a_n b_n + a_n b - a_n b - ab|$

$|a_n(b_n - b) + b(a_n - a)|$

$< C_1$ $\quad \frac{\varepsilon}{2C_1}$ $\quad \frac{\varepsilon}{2b}$

(24) **C**

Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ seqüências de reais convergentes.

Demonstre **até uma** das:

(16) **C1.** $\lim_n(a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n$.
(24) **C2.** $\lim_n(a_n \cdot b_n) = \lim_n a_n \cdot \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA C2 .

ESQUECI

o ponto final, sim

use ponto final!

Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ Seq(Real), t.q. $(a_n)_n \to a$ e $(b_n)_n \to b$

Seja C_1 uma cota de $(a_n)_n$; Seja $\varepsilon > 0$.

Logo sejam N_a, N_b t.q. $(\forall m_a \geq N_a)[d(a_m, a) < \frac{\varepsilon}{2|b|}]$ e $(\forall n_b \geq N_b)[d(b_m, b) < \frac{\varepsilon}{2|C_1|}]$.

seria mais consistente chamar de C_a

Shhh! Ninguém viu!

Seja $N = \max\{N_a, N_b\}$

Vou demonstrar que $(\forall m \geq N)[d(a_m b_m, ab) < \varepsilon]$.

Seja m : Nat t.q. $m \geq N$.

Calculamos:

$$
\begin{aligned}
d(a_m b_m, ab) &= |a_m b_m - ab| \quad [\text{def. } d(x,y)]\\
&= |a_m b_m + a_m b - a_m b - ab|\\
&= |a_m(b_m - b) + b(a_m - a)|\\
&< |a_m|\,|b_m - b| + |b|\,|a_m - a| \quad [\text{desigualdade triangular}]\\
&= |a_m|\, d(b_m, b) + |b|\, d(a_m, a) \quad [+ \text{def. } d(x,y)]\\
&< |C_1| \cdot \frac{\varepsilon}{2|C_1|} + |b| \frac{\varepsilon}{2|b|} \quad [\text{escolha de } C_1, N_a, N_b]\\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

!

$\leq$

!

$=$

(8♭) **D**

Desenha um diagrama cuja comutatividade afirma o **C1** acima.

RESPOSTA.

(34) **M**

Sejam $\langle A\,;\,d_A\rangle, \langle B\,;\,d_B\rangle$ espaços métricos e $f : A \to B$.

Definição 1. Dizemos que f é *contínua* sse

$$(\forall a \in A)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \mathcal{B}_\delta(a))\,[\,f\,x \in \mathcal{B}_\varepsilon(f\,a)\,]$$

Definição 2. Dizemos que f é *seqüencialmente contínua* sse

$$(\forall a \in A)\,(\forall (a_n)_n \to a)\,[\,(f\,a_n)_n \to f\,a\,].$$

$\iota\,(\forall \varepsilon>0)\,(\exists M)\,(\forall m \geq M)\,[\,d((f\,a_m)_m, f\,a) < \varepsilon\,]$.

Teorema. f continua $\iff$ f seqüencialmente contínua.

Demonstração da ($\Rightarrow$).

Seja $f : A \to B$ t.q. f é continua. (1)

Seja $a \in A$

Seja $(a_m)_m \to a$

Seja $\varepsilon_1 > 0$.

logo seja $\delta > 0$ t.q. $(\forall x \in \mathcal{B}_\delta(a))\,[\,f\,x \in \mathcal{B}_1(f\,a)\,]$ ~~[aplico a um (1)]~~ "pela (1)" e pronto.

Vou demostrar que $(\forall m \geq \delta)\,[\,d((f\,a_m)_m, f\,a) < \varepsilon_1\,]$

Seja m : det t.q. $m \geq \delta$

Calculemos:

$d((f\,a_m)_m, f\,a) = |\,(f\,a_m)_m - f\,a\,|$ [def. $d(x,y)$]

⋮

?

$\delta\ \delta\ \delta\ \delta\ \delta\ \delta\ \delta$ ... (Escreva 100 vezes!)

aqui era pra ser ε_1?

Aqui parece ter um type error/ confusão.

(1) esse $\forall m$ aí não tá achando nenhuma ocorrência livre no seu escopo para ligar!

(2) δ é um real, e escrevendo "$\forall m \geq \delta$" entendemos que m será real também. A situação seria diferente se fosse "$\forall m \geq \lceil \delta \rceil$", por exemplo, mas aqui não faria sentido.

$\iota\,(\forall \varepsilon>0)\,(\exists N)\,(\forall m \geq N)\,[\,d(a_m, a) < \varepsilon\,]$

Só isso mesmo.

Veja bem o gabarito!

Não conseguindo fechar esta, deveria ter escolhido uma das **A** ou **P**!

(24) **A**

Demonstre **até uma** das:

(16) **A1.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.

(24) **A2.** Seja $(a_n)_n$ seqüência de reais crescente e sup-cotada. Demonstre que $(a_n)_n$ é convergente.

Demonstração da A1 .

$\mathbb{R}_{\mathbb{N}} \to (\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n \geq N)[d(\mathbb{R}_{\mathbb{N}}) < \varepsilon]$

não dá...

(24) **P**

Demonstre **até uma** das:

(18) **P1.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.

(24) **P2.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que existe real r tal que $r^2 = \vartheta$.

Dica: *Considere a seqüência* $(t_n)_n$ *definida pelas* $t_0 = 0; t_{n+1} = t_n + \frac{1}{2}(\vartheta - t_n^2)$.

Demonstração da P1 .

$(\vartheta^n)_n = d(\vartheta^n) = 0 \Rightarrow (\vartheta^n)_n$

...!!

(24) **A**

Demonstre **até uma** das:

(16) **A1.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.

?

(24) **A2.** Seja $(a_n)_n$ seqüência de reais crescente e sup-cotada. Demonstre que $(a_n)_n$ é convergente.

DEMONSTRAÇÃO DA A2.

Como $(a_n)_n$ é sup-cotada e pela R-compl., seja $S = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Vou demonstrar que $(a_n)_n \to S$.

Seja $\varepsilon > 0$.

parece · e não −.

Seja N tal que $a_N \geq S \cdot \varepsilon/2$.

Vou demonstrar que $(\forall m \geq N)[\, d(a_m, S) < \varepsilon \,]$.

Seja $m \geq N$.

Calculamos:

$$\begin{aligned} S - \varepsilon/2 &\leq a_N && \text{(escolha de } N\text{)} \\ &\leq a_m && ((a_n)_n \text{ é crescente}) \\ &< S + \varepsilon/2 \end{aligned}$$

por que esse (<) virou (≤) aqui?

Logo, $S - \varepsilon/2 \leq a_m < S + \varepsilon/2$, ou seja $-\varepsilon/2 \leq a_m - S < \varepsilon/2$, ou seja $|a_m - S| = d(a_m, S) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$.

(24) **P**

Demonstre **até uma** das:

(18) **P1.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.

(24) **P2.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que existe real r tal que $r^2 = \vartheta$.

Dica: *Considere a seqüência* $(t_n)_n$ *definida pelas* $t_0 = 0; t_{n+1} = t_n + \frac{1}{2}(\vartheta - t_n^2)$.

DEMONSTRAÇÃO DA _____ .

(24) **C**

Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ seqüências de reais convergentes.

Demonstre **até uma** das:

(16) **C1.** $\lim_n(a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n$.
(24) **C2.** $\lim_n(a_n \cdot b_n) = \lim_n a_n \cdot \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA _____ .

(1) veja comentário anterior sobre pontos.

(8[b]) **D**

(2) aqui tá somando algo? Era pra ser $((a_n)_n, (b_n)_n)$?

Desenha um diagrama cuja comutatividade afirma o **C1** acima.
RESPOSTA.

(3) Veja <u>bem</u> o gabarito!

$$\begin{tikzcd}
(a_n)_n + (b_n)_n \arrow[r, "\oplus"] \arrow[d, "\lim"'] & (a_n + b_n)_n \arrow[d, "\lim"] \\
\lim_n(a_n) + \lim_n(b_n) \arrow[r, "\lim \oplus"'] & \lim_n(a_n + b_n)
\end{tikzcd}$$

'u' ?

(34) M

Sejam $\langle A\,;\,d_A\rangle$, $\langle B\,;\,d_B\rangle$ espaços métricos e $f : A \to B$.

Definição 1. Dizemos que f é *contínua* sse

$$(\forall a \in A)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \mathcal{B}_\delta(a))\,[\,f\ x \in \mathcal{B}_\varepsilon(f\ a)\,]$$

Definição 2. Dizemos que f é *seqüencialmente contínua* sse

$$(\forall a \in A)\,(\forall (a_n)_n \to a)\,[\,(f\ a_n)_n \to f\ a\,].$$

Teorema. f continua $\iff$ f seqüencialmente contínua.

Demonstração da ($\Rightarrow$).

Suponha que f é contínua. ✓
Seja a tal que $a \in A$. ✓
Seja $(a_n)_n$ tal que $(a_n)_n \to a$. ✓
Seja $\varepsilon > 0$. ✓
Seja δ tal que $\delta > 0$ e $(\forall x \in \mathcal{B}_\delta(a))[\,f x \in \mathcal{B}_\varepsilon(f a)\,]$. ✓
Seja N tal que $(\forall n \geq N)[\,d(a_n, a) < \delta\,]$. ✓
Vou demonstrar que $(\forall n \geq N)[\,d(f a_n, f a) < \varepsilon\,]$. ✓
Seja $n \geq N$. ✓
Logo, pela escolha de δ e de N, $f a_n \in \mathcal{B}_\varepsilon(f a)$.

∎

Todo passinho separado e bonitinho e chegar aqui para juntar tudo isso num passo, é suspeito demais.

Só isso mesmo.

(24) **A**

Demonstre **até uma** das:

(16) **A1.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.

(24) **A2.** Seja $(a_n)_n$ seqüência de reais crescente e sup-cotada. Demonstre que $(a_n)_n$ é convergente.

DEMONSTRAÇÃO DA A1 .

Sufomno Rn cotado. ✓

Seja S=sup(RN). ~ (precisa habitado também, e citar a completude!)

Logo, toça a o último membro ≤ S. (1) não definimos «último membro de_» e logo isso nem compila.

Logo, a +1 > S. [RN é +1 techodo] (2) mesmo "corrigindo" para max, teus dados não te permitem solicitá-lo.

Contradiction, pois S ≠ Sup(RN).

vou fazer um bolo.

(24) **P**

Demonstre **até uma** das:

(18) **P1.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.

(24) **P2.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que existe real r tal que $r^2 = \vartheta$.

Dica: Considere a seqüência $(t_n)_n$ definida pelas $t_0 = 0$; $t_{n+1} = t_n + \frac{1}{2}(\vartheta - t_n^2)$.

DEMONSTRAÇÃO DA ____ .

(34) **M**

Sejam $\langle A \,;\, d_A\rangle, \langle B \,;\, d_B\rangle$ espaços métricos e $f : A \to B$.

Definição 1. Dizemos que f é *contínua* sse

$\{x \mid d(x,a) < \varepsilon\}$

$$(\forall a \in A)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \mathcal{B}_\delta(a))\,[\,f\ x \in \mathcal{B}_\varepsilon(f\ a)\,]$$

Definição 2. Dizemos que f é *seqüencialmente contínua* sse

$$(\forall a \in A)\,(\forall (a_n)_n \to a)\,[\,(f\ a_n)_n \to f\ a\,]\,.$$

Teorema. f continua $\iff$ f seqüencialmente contínua.

DEMONSTRAÇÃO DA ($\Rightarrow$).

Seja f continua.
seja $a \in A$.
Seja $(a_n)_n \to a$,
seja $\varepsilon > 0$.
Seja N t.q. $(\forall x \in B_N(a))[fx \in B(fa)]$.
seja N' t.q. $(\forall n \geq N')(d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$.
logo, seja m max$\{N, N'\}$.
logo, $d(a_m, a) < \frac{\varepsilon}{2}$.
logo, pela escolha de N, $d(fa_m, fa) < \frac{\varepsilon}{2}$. ?
calculamos:
$d(fa_m, fa) < \frac{\varepsilon}{2}$
$< \varepsilon$ ∎.

parece ter confundido algo aqui, além de type error.

viajou?

Só isso mesmo.

(24) **C**

Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ seqüências de reais convergentes.

Demonstre **até uma** das:

(16) **C1.** $\lim_n(a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n$.
(24) **C2.** $\lim_n(a_n \cdot b_n) = \lim_n a_n \cdot \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA C1 .

Seja a t.q $a = \lim_m a_m$.
Seja b t.q $b = \lim_m b_m$.
Seja $\varepsilon > 0$.
Seja N_a t.q $(\forall m \geq N_a)[d(a_m, a) < \frac{\varepsilon}{2}]$.
Seja N_b t.q $(\forall m \geq N_b)[d(b_m, b) < \frac{\varepsilon}{2}]$.
Vou demonstrar $(\forall m \geq \max(N_a, N_b))$ $[d(a_m + b_m, a+b) < \varepsilon]$.
Seja $m \geq \max(N_a, N_b)$.
Calculamos

$$
\begin{aligned}
d(a_m + b_m, a+b) &= |a_m + b_m - (a+b)| \\
&= |a_m + b_m - a - b| \\
&= |(a_m - a) + (b_m - b)| && [\text{~~simpl~~}] \\
&\leq |a_m - a| + |(b_m - b)| && [\text{tri\_ineq}] \\
&= d(a_m, a) + d(b_m, b) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} && [\text{order\_add}] \\
&= \varepsilon. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

(8♭) **D**

Desenha um diagrama cuja comutatividade afirma o **C1** acima.
RESPOSTA.

(34) **M**

Sejam $\langle A\,;\,d_A\rangle, \langle B\,;\,d_B\rangle$ espaços métricos e $f : A \to B$.

Definição 1. Dizemos que f é *contínua* sse

$$(\forall a \in A)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \mathcal{B}_\delta(a))\,[\,f\ x \in \mathcal{B}_\varepsilon(f\ a)\,]$$

Definição 2. Dizemos que f é *seqüencialmente contínua* sse

$$(\forall a \in A)\,(\forall (a_n)_n \to a)\,[\,(f\ a_n)_n \to f\ a\,].$$

Teorema. f continua $\iff$ f seqüencialmente contínua.

DEMONSTRAÇÃO DA ($\Rightarrow$).

Suponha f contínua

Seja $a \in A$.

Seja $(a_n)_n \to a$.

Seja $\varepsilon > 0$.

Seja $\gamma > 0$, t.q $(\forall x \in \mathcal{B}_\gamma(a))[fx \in \mathcal{B}_\varepsilon(fa)]$.

[f contínua]

Seja N t.q $(\forall n \geq N)[d(a_n, a) < \gamma]$. (1)

[$(a_n)_n \to a$]

Vou demonstrar que $(\forall n \geq N)[d(f a_n, fa) < \varepsilon]$

Seja $n \geq N$.

Temos $d(a_n, a) < \gamma$. [1]

Logo, $a_n \in \mathcal{B}_\gamma(a)$.

Logo, $f a_n \in \mathcal{B}_\varepsilon(fa)$. [$f$ contínua]

Logo, $d(f a_n, fa) < \varepsilon$.

$\boxtimes$

γ ~ γάμμα ~ gamma

δ ~ δέλτα ~ delta

ε ~ έψιλον ~ epsilon

Só isso mesmo.

(24) **A**

Demonstre **até uma** das:

(16) **A1.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.

(24) **A2.** Seja $(a_n)_n$ seqüência de reais crescente e sup-cotada. Demonstre que $(a_n)_n$ é convergente.

DEMONSTRAÇÃO DA A1 .

~~Seja M uma cota do conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$.~~

~~Demonstração por contradição~~

~~Seja M a melhor cota superior do conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$~~

~~Suponha que $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ é sup-cotado~~

Seja M o supremum de $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$. X ← Qual dado permite isso?

$\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ (+)-Fechado logo não possui cota superior. X

{0} também é

X

(24) **P**

Demonstre **até uma** das:

(18) **P1.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.

(24) **P2.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que existe real r tal que $r^2 = \vartheta$.

Dica: Considere a seqüência $(t_n)_n$ definida pelas $t_0 = 0; t_{n+1} = t_n + \frac{1}{2}(\vartheta - t_n^2)$.

DEMONSTRAÇÃO DA P1 .

$(\vartheta^n)_n \to 0 \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n \geq N)[d(\theta^n, 0) < \varepsilon]$

Seja $\varepsilon = 1/2$. ← olha → Enquanto há reais positivos além do teu $\frac{1}{2}$, vamo ter problema...

Seja N tq. $(\forall n \geq N)[d(\theta^n, 0) < 1/2]$

Seja n tq. $n \geq N$.

Calculamos.

$$|\theta^n - 0| < 1/2$$

$$|\theta^n| < 1/2$$

X

(34) **M**

Sejam $\langle A\,;\,d_A\rangle, \langle B\,;\,d_B\rangle$ espaços métricos e $f : A \to B$.

Definição 1. Dizemos que f é *contínua* sse

$$(\forall a \in A)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \mathcal{B}_\delta(a))\,[\,f\ x \in \mathcal{B}_\varepsilon(f\ a)\,]$$

Definição 2. Dizemos que f é *seqüencialmente contínua* sse

$$(\forall a \in A)\,(\forall (a_n)_n \to a)\,[\,(f\ a_n)_n \to f\ a\,]\,.$$

Teorema. f continua $\iff$ f seqüencialmente contínua.

Demonstração da ($\Rightarrow$).

Seja $a \in A$.
Seja $\varepsilon > 0$
Seja $x \in B_\delta(a)$
Suponha $fx \in B_\varepsilon(fa)$
Seja $(a_n)_n$ seq tq $(a_n)_n \to a$

começa escrevendo o tabuleiro DADOS-ALVO, em cada linha atualizando com os comandos escritos para perceber os problemas aqui...

Só isso mesmo.

(24) **A**

robou!

Demonstre **até uma** das:

(16) **A1.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.

(24) **A2.** Seja $(a_n)_n$ seqüência de reais crescente e sup-cotada. Demonstre que $(a_n)_n$ é convergente.

DEMONSTRAÇÃO DA A1 .

Suponha $\mathbb{R}_N$ sup-cotado e $\mathbb{R}_N$ inf-cotado. ← pra quê?

Seja S a cota superior de $\mathbb{R}_N$.

Seja I a cota inferior de $\mathbb{R}_N$. ...

Seja $x' \in \mathbb{R}_N$ t.q. $x' = S + 1$. ? ← qual dado permite isso? (nenhum!)

Logo $(\forall x \in \mathbb{R}_N)[S \geq x]$.

Logo $S \geq x'$?

Contradição $S \geq S + 1$. ?!

∎

(24) **P**

Demonstre **até uma** das:

(18) **P1.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.

(24) **P2.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que existe real r tal que $r^2 = \vartheta$.

Dica: Considere a seqüência $(t_n)_n$ definida pelas $t_0 = 0; t_{n+1} = t_n + \frac{1}{2}(\vartheta - t_n^2)$.

DEMONSTRAÇÃO DA ____ .

(24) **C**

Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ seqüências de reais convergentes.

Demonstre **até uma** das:

(16) **C1.** $\lim_n(a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n$.

(24) **C2.** $\lim_n(a_n \cdot b_n) = \lim_n a_n \cdot \lim_n b_n$.

péssimas escolhas de nomes! a, b ou l_a, l_b, ...

DEMONSTRAÇÃO DA C1.

Seja l t.q. $\boxed{l} = \lim_n a_n$. ✓

Seja m t.q. $\boxed{m} = \lim_n b_n$. ✓

Suponha $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n \geq N)[d(a_n + b_n, l+m) < \varepsilon]$. ✗

Seja $\varepsilon > 0$. ✓

??

Seja N t.q. $(\forall n \geq N)[d(a_n + b_n, l+m) < \varepsilon]$ ✗

calculamos:

$|a_n + b_n - (l+m)|$
$= |a_n + b_n - l - m|$
$= |a_n - l + b_n - m|$
$= |(a_n - l) + (b_n - m)|$
$= |a_n - l| + |b_n - m|$

?

(8) **D**

Desenha um diagrama cuja comutatividade afirma o **C1** acima.
RESPOSTA.

Não vou supor nada que não sou obrigado supor. (Lado esquerdo de implicação no ALVO.)
Coincidentalmente, a prop que tá pedindo supor aqui é o teu alvo.)