FMC1, 2022.1
(Turma N12 do Thanos)

Prova 3.2
(points: 58; bonus: 8$^\flat$; time: 64')

Nome: Θάνος **Gabarito**

2022-12-16

Regras:

- **I.** Não vires esta página antes do começo da prova.
- **II.** Nenhuma consulta de qualquer forma.
- **III.** Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]
- **IV.** Nenhuma comunicação de qualquer forma.
- **V.** $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC1})\,]$.[2]
- **VI.** Responda dentro das caixas indicadas.
- **VII.** Os pontos bônus são considerados apenas para quem consegue ser aprovado sem eles e tem pelo menos 50 pontos na mesma unidade. São transferíveis para outras unidades com pelo menos 50 pontos também.[3]
- **VIII.** **Escolha até 2 dos A, P, C, M.**[4]

Esclarecimentos.

Estamos usando os reais $\mathbb{R}$ com o *axioma* da completude:

$$(\forall A : \mathsf{Set\ Real})[\,A \text{ habitado } \ \& \ A \text{ cotado por cima } \implies A \text{ possui supremum}\,]. \qquad \text{(R-Compl)}$$

Suas respostas precisam ser escritas na linguagem "(mid+)-level" que temos elaborado.

Em todos os problemas, podes usar os teoremas que demonstramos na primeira parte do IDMb (pré-completude). Nos problemas **P**, **C**, **D**, **M** podes usar os (NIP), (MCT), (BW), (CCC).

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

[4] Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(24) **A**

Demonstre **até uma** das:

(16) **A1.** Demonstre que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ dos reais naturais não é cotado.

(24) **A2.** Seja $(a_n)_n$ seqüência de reais crescente e sup-cotada. Demonstre que $(a_n)_n$ é convergente.

DEMONSTRAÇÃO DA _____ .

A1. Suponha que $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ cotado, e logo seja $s = \sup \mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ (pelo axioma da completude, pois $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ habitado também). Considere o $s - 1$. Temos $s - 1 < s$, e logo $s - 1$ não é uma supcota do $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$. Logo seja $n \in \mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ tal que $s - 1 < n$. Como $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ é $(+1)$-fechado, logo $n + 1 \in \mathbb{R}_{\mathbb{N}}$. Mas $s < n + 1$, contradizendo que $s > \mathbb{R}_{\mathbb{N}}$.

A2. Seja $(a_n)_n$ seqüência crescente e supcotada. Logo $\{a_n\}_n$ supcatado e logo seja s o seu supremum. Vou demonstrar que $(a_n)_n \to s$. Seja $\varepsilon > 0$. Pela escolha de s, $s - \varepsilon$ não pode ser supcota da $(a_n)_n$, e logo seja N tal que $a_N > s - \varepsilon$. Temos então $s - \varepsilon < a_N < s$. Como $(a_n)_n$ crescente, temos $s - \varepsilon < (a_n)_{n \geq N} < s$. Logo $(a_n)_{n \geq N} \subseteq \mathcal{B}_{\varepsilon}(()s)$.

(24) **P**

Demonstre **até uma** das:

(18) **P1.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que $(\vartheta^n)_n \to 0$.

(24) **P2.** Seja $0 < \vartheta < 1$. Demonstre que existe real r tal que $r^2 = \vartheta$.

Dica: *Considere a seqüência $(t_n)_n$ definida pelas $t_0 = 0$; $t_{n+1} = t_n + \frac{1}{2}(\vartheta - t_n^2)$.*

DEMONSTRAÇÃO DA _____ .

P1. Tendo que $(\vartheta^n)_n$ é inf-cotada e decrescente (Lemmata), ela é convergente pelo (MCT); seja $\ell = \lim_n \vartheta^n$. Basta mostrar $\ell = 0$. Usando as propriedades algébricas de limites que demosntramos, calculamos:

$$\ell = \lim_n \vartheta^n = \lim_n \vartheta^{n+1} = \lim_n \vartheta^n \vartheta = \vartheta \lim_n \vartheta^n = \vartheta \ell.$$

Logo $\ell = 0$, pois, caso contrário, obteriamos $\vartheta = 1$, contradizendo nossa hipotese sobre ϑ.

P2. A seqüência $(t_n)_n$ da dica é crescente e sup-cotada (Lemmata), e logo seja ℓ seu limite (pelo (MCT)). Usando as propriedades algébricas de limites que demosntramos, calculamos:

$$\begin{aligned} \ell = \lim_n t_n = \lim_n t_{n+1} = \lim_n (t_n + \frac{1}{2}(\vartheta - t_n^2)) &= \lim_n t_n + \lim_n (\frac{1}{2}(\vartheta - t_n^2)) \\ &= \ell + \frac{1}{2} \lim_n (\vartheta - t_n^2) = \ell + \frac{1}{2}(\vartheta - \lim_n t_n^2) = \ell + \frac{1}{2}(\vartheta - \ell^2) \end{aligned}$$

Logo $0 = \frac{1}{2}(\vartheta - \ell^2)$, e logo $\vartheta - \ell^2 = 0$. Portanto $\vartheta = \ell^2$.

(24) **C**

Sejam $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ seqüências de reais convergentes.

Demonstre **até uma** das:

(16) **C1.** $\lim_n(a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n$.
(24) **C2.** $\lim_n(a_n \cdot b_n) = \lim_n a_n \cdot \lim_n b_n$.

DEMONSTRAÇÃO DA _____ .

C1. Vou demonstrar $(a_n + b_n)_n \to a + b$.
Seja $\varepsilon > 0$.
Pelas escolhas de a, b, sejam N_a e N_b tais que

$$(\forall n \geq N_a)[\,d(a_n, a) < \varepsilon/2\,];$$
$$(\forall n \geq N_b)[\,d(b_n, b) < \varepsilon/2\,].$$

Seja $N = \max(N_a, N_b)$. Seja $n \geq N$.
Assim $n \geq N_a$ e $n \geq N_b$ (pela escolha de N), e logo $d(a_n, a) < \varepsilon/2$ e $d(b_n, b) < \varepsilon/2$ (pelas escolhas de N_a e N_b). Calculamos:

$$\begin{aligned}
d(a_n + b_n, a + b) &= |(a_n + b_n) - (a + b)| \\
&= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\
&\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\
&= d(a_n, a) + d(b_n, b) \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

C2. Vou demonstrar $(a_n b_n)_n \to ab$.
Seja $\varepsilon > 0$. Como $(a_n)_n$ é cotada, seja $M_a > 0$ uma cota dela.
Pelas escolhas de a, b, sejam N_a e N_b tais que

$$(\forall n \geq N_a)\left[\,d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2|b| + 1}\,\right];$$
$$(\forall n \geq N_b)\left[\,d(b_n, b) < \frac{\varepsilon}{2M_a}\,\right].$$

Sejam $N = \max(N_a, N_b)$, e $n \geq N$.
Assim $n \geq N_a$ e $n \geq N_b$ (pela escolha de N).
Calculamos:

$$\begin{aligned}
d(a_n b_n, ab) &= |(a_n b_n) - (ab)| \\
&= |(a_n b_n) - a_n b + a_n b - (ab)| \\
&= |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \\
&\leq |a_n(b_n - b)| + |(a_n - a)b| \\
&\leq |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| \\
&< M_a|b_n - b| + |a_n - a||b| \\
&\leq M_a\frac{\varepsilon}{2M_a} + \frac{\varepsilon}{2|b| + 1}|b| \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

(8$^\flat$) **D**

Desenha um diagrama cuja comutatividade afirma o **C1** acima.
RESPOSTA.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Seq}(\mathbb{R}) \times \mathsf{Seq}(\mathbb{R}) \arrow[r, "\lim \times \lim"] \arrow[d, "\oplus"'] & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \arrow[d, "+"] \\
\mathsf{Seq}(\mathbb{R}) \arrow[r, "\lim"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

onde $(\oplus)$ é a pointwise-$(+)$, e $\lim \times \lim$ a função que aplica o $\lim$ em cada um dos seus argumentos, retornando o par dos limites.

(34) **M**

Sejam $(A\,;d_A),(B\,;d_B)$ espaços métricos e $f : A \to B$.

Definição 1. Dizemos que f é *contínua* sse

$$(\forall a \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \mathcal{B}_\delta(a))\,[\,f\ x \in \mathcal{B}_\varepsilon(f\ a)\,]$$

Definição 2. Dizemos que f é *seqüencialmente contínua* sse

$$(\forall a \in A)\,(\forall (a_n)_n \to a)\,[\,(f\ a_n)_n \to f\ a\,]\,.$$

Teorema. f continua $\iff$ f seqüencialmente contínua.

Demonstração da $(\Rightarrow)$.

Suponha f continua.
Sejam $a \in A$, e $(a_n)_n$ seqüência no A, tais que $(a_n)_n \to a$.
Preciso demonstrar que $(f\ a_n)_n \to f\ a$.
Seja $\varepsilon > 0$. Como f continua, logo seja $\delta > 0$ tal que $(\forall x \in \mathcal{B}_\delta(a))\,[\,f\ x \in \mathcal{B}_\varepsilon(f\ a)\,]$.
Seja N tal que $(\forall n \geq N)\,[\,d_A(a_n, a) < \delta\,]$.
Seja $n \geq N$. Basta verificar que $d_B(f\ a_n, f\ a) < \varepsilon$.
Como $n \geq N$, logo $d_A(a_n, a) < \delta$, ou seja, $a_n \in \mathcal{B}_\delta(a)$.
Logo, pela escolha de δ, temos $f\ a_n \in \mathcal{B}_\varepsilon(f\ a)$.
Logo $d_B(f\ a_n, f\ a) < \varepsilon$.

Obviamente fica como hw demonstrar a outra direção!

Só isso mesmo.

P1-aux.
*A sequência da **P1** é inf-cotada e decrescente.*

Demonstração.
Vou mostrar por indução que $(\vartheta^n)_n \geq 0$. Temos $\vartheta^0 = 1 \geq 0$, estabelecendo a base da indução. Seja k natural tal que $\vartheta^k \geq 0$. Temos:

$$\vartheta^{k+1} = \vartheta^k \vartheta \geq 0$$

como produto de não-negativos. Vou mostrar que $(\vartheta^n)_n$ é decrescente. Seja k natural. Calculamos:

$$\vartheta^{k+1} = \vartheta^k \vartheta < \vartheta^k.$$

P2-aux.
*A seqüência da dica de **P2** é sup-cotada e crescente.*

Demonstração.
Vou mostrar que $(t_n)_n \leq 1$. Seu primeiro termo é o $0 < 1 \leq 1$. Seja k natural. Calculamos:

$$\begin{aligned}
t_{k+1} = t_k + \frac{1}{2}(\vartheta - t_k^2) &= \frac{1}{2}(\vartheta + 2t_k - t_k^2) \\
&= \frac{1}{2}(\vartheta - (t_k^2 - 2t_k)) \\
&= \frac{1}{2}(\vartheta - (t_k^2 - 2t_k + 1 - 1)) \\
&= \frac{1}{2}((\vartheta + 1) - (t_k^2 - 2t_k + 1)) \\
&= \frac{1}{2}((\vartheta + 1) - (t_k - 1)^2) \\
&\leq \frac{1}{2}(\vartheta + 1) \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

Basta mostrar por indução que para todo n, temos $t_{n+1} - t_n \geq 0$. A base é trivial.
Seja $k \geq 1$ tal que $t_k - t_{k-1} \geq 0$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
t_{k+1} - t_k &= (t_k + \frac{1}{2}(\vartheta - t_k^2)) - (t_{k-1} + \frac{1}{2}(\vartheta - t_{k-1}^2)) \\
&= (t_k - t_{k-1}) + \frac{1}{2}\big((\vartheta - t_k^2) - (\vartheta - t_{k-1}^2)\big) \\
&= (t_k - t_{k-1}) - \frac{1}{2}\big(t_k^2 - t_{k-1}^2\big) \\
&= (t_k - t_{k-1}) - \frac{1}{2}(t_k + t_{k-1})(t_k - t_{k-1}) \\
&= \underbrace{(t_k - t_{k-1})}_{\geq 0} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}(t_k + t_{k-1})\right)}_{\geq 0} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

onde no último passo usamos a (HI) e que a $(t_n)_n \leq 1$ (e logo $t_i + t_j \leq 2$).