FMC1, 2022.1
(Turma N12 do Thanos)

Prova 3.1
(points: 42; bonus: $0^\flat$; time: 48')

Nome:

2022-12-07

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma.

V. $(\forall x)\,[\,\text{Colar}(x) \implies \neg\text{Passar}(x, \text{FMC1})\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas.

VII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

VIII. **Escolha até 2 dos $\mathbf{A}, \mathbf{S}, \mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{C}$.**[3]

Suas respostas precisam ser escritas na linguagem "mid-level" que temos elaborado.
Nos problemas **S**, **L**, **M**, **C** podes usar os teoremas que demonstramos na primeira parte de IDMb.

Usamos Real para denotar um tipo cujos membros chamamos de (números) reais e onde temos os seguintes componentes primitivos:

$$0, 1 : \mathsf{Real} \qquad (+), (\cdot) : \mathsf{Real} \times \mathsf{Real} \to \mathsf{Real} \qquad (-) : \mathsf{Real} \to \mathsf{Real} \qquad (>) : \mathsf{Real} \times \mathsf{Real} \to \mathsf{Prop}.$$

Estipulamos as proposições seguintes como axiomas:

$$(\forall a, b, c)[\,a + (b + c) = (a + b) + c\,] \tag{RA-Ass}$$
$$(\forall a)[\,0 + a = a = a + 0\,] \tag{RA-Id}$$
$$(\forall a)[\,(-a) + a = 0 = a + (-a)\,] \tag{RA-Inv}$$
$$(\forall a, b)[\,a + b = b + a\,] \tag{RA-Com}$$

$$(\forall a, b, c)[\,a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c\,] \tag{RM-Ass}$$
$$(\forall a)[\,a \cdot 1 = a\,] \tag{RM-Id}$$
$$(\forall a \neq 0)\big(\exists a'\big)\big[\,a' \cdot a = 1 = a \cdot a'\,\big] \tag{RM-Inv*}$$
$$(\forall a, b)[\,a \cdot b = b \cdot a\,] \tag{RM-Com}$$

$$0 \neq 1 \tag{R-NTriv}$$
$$(\forall d, a, b)[\,(a + b) \cdot d = (a \cdot d) + (b \cdot d) \;\;\&\;\; d \cdot (a + b) = (d \cdot a) + (d \cdot b)\,] \tag{R-Dist}$$

$$(\forall a, b, c)[\,a > b \;\;\&\;\; b > c \implies a > c\,] \tag{RO-Trans}$$
$$(\forall a, b)[\,\text{e.u.d.: } a > b;\ a = b;\ b > a\,] \tag{RO-Tri}$$
$$(\forall a, b, c)[\,a > b \implies a + c > b + c\,] \tag{RO-A}$$
$$(\forall a, b, c)[\,a > b \;\;\&\;\; c > 0 \implies ac > bc\,] \tag{RO-M}$$

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(12) **A**

Demonstre pelos axiomas:

$$\textit{para qualquer real } x,\ -x = x(-1).$$

DEMONSTRAÇÃO.

(12) **S**

S1. Defina o que significa *supremo* no contexto de números reais.
DEFINIÇÃO.

S2. Enuncie e demonstre a unicidade dos suprema.
ENUNCIADO.

DEMONSTRAÇÃO.

(18) **L**

Seja $(a_n)_n$ seqüência de reais.
Se $(a_n)_n$ é eventualmente constante, então $(a_n)_n$ é convergente.
DEMONSTRAÇÃO.

(21) **M**

Sejam $(a_n)_n$ seqüência de reais, a, c reais com $c \neq 0$, e tais que $(a_n)_n \to a$. Logo $(ca_n)_n \to ca$.
DEMONSTRAÇÃO.

(21) **C**

Definição. Seja $(x_n)_n$ seqüência de reais. Dizemos que $(x_n)_n$ é *autoconvergente* sse seus termos eventualmente ficam perto entre si. Formalmente:

$$(x_n)_n \text{ autoconvergente } \overset{\text{def}}{\iff} (\forall \varepsilon > 0)(\exists N)\,(\forall i, j \geq N)\,[\,d(x_i, x_j) < \varepsilon\,]\,.$$

Proposição. Toda seqüência de reais autoconvergente é cotada.
DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO.

Só isso mesmo.

Rascunho