FMC1, 2022.2
(Turma N12 do Thanos)

Prova 2.1
(points: 36; bonus: $0^\flat$; time: 48')

Nome: Θάνος **Gabarito**

2022-11-07

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC1})\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas, escrevendo em forma clara e facilmente legível.

VII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

VIII. Escolha até 1 problema de cada página.[3]

Esclarecimento: Tuas demonstrações precisam ser escritas na linguagem mid-level que temos elaborado na disciplina.[4] Tuas definições devem utilizar apenas a sintaxe e a notação que temos utilizado na disciplina.

Dados:

Definimos os tipos de dados:

```
data Bool                 data Nat                 data ListNat
  False : Bool              O : Nat                  Nil  : ListNat
  True  : Bool              S : Nat → Nat            Cons : Nat → ListNat → ListNat
```

Definimos as operações

$$
\begin{array}{lll}
(+) : \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat} & (\cdot) : \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat} & ({}^\wedge) : \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat} \\
n + 0 \quad = n & n \cdot 0 \quad = 0 & n \mathbin{^\wedge} 0 \quad = S0 \\
n + Sm = S(n + m) & n \cdot Sm = (n \cdot m) + n & n \mathbin{^\wedge} Sm = (n \mathbin{^\wedge} m) \cdot n.
\end{array}
$$

e atribuimos em todas associatividade (sintáctica) à direita. Atribuímos também precedências (sintácticas) de baixa para alta: $(+), (\cdot), ({}^\wedge)$. Definimos a relação $(\leq) : \mathsf{Nat} \times \mathsf{Nat} \to \mathsf{Prop}$ pela

$$n \leq m \overset{\text{def}}{\iff} (\exists k)\,[\,n + k = m\,]\,.$$

São considerados **dados os teoremas:** $(+)$-ass/com/id/inv, $(\cdot)$-ass/com, $(\leq)$-refl/trans/min/succ.

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

[4] *Não inclua* os Dados/Alvo nem outros rascunhos no teu texto!

(8) **I**

Internalize a relação $(\leq) : \mathsf{Nat} \times \mathsf{Nat} \to \mathsf{Prop}$ e os predicados $\mathrm{Even}, \mathrm{Odd} : \mathsf{Nat} \to \mathsf{Prop}$:

$$\begin{aligned} &leq : \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat} \to \mathsf{Bool} \\ &leq\ 0\ m = \mathsf{True} \\ &leq\ Sn\ 0 = \mathsf{False} \\ &leq\ Sn\ Sm = leq\ n\ m \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &ev : \mathsf{Nat} \to \mathsf{Bool} \\ &ev\ 0 = \mathsf{True} \\ &ev\ Sn = od\ n \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &od : \mathsf{Nat} \to \mathsf{Bool} \\ &od\ 0 = \mathsf{False} \\ &od\ Sn = ev\ n \end{aligned}$$

(18) **R**

Levando em consideração os exemplos de uso no quadro, defina recursivamente as funções:

$$product : \mathsf{ListNat} \to \mathsf{Nat} \qquad replaceAt, addAt : \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat} \to \mathsf{ListNat} \to \mathsf{ListNat}$$
$$tidy : \mathsf{ListNat} \to \mathsf{Bool} \qquad addNat, removeAt : \mathsf{Nat} \to \mathsf{ListNat} \to \mathsf{ListNat}$$
$$takeEvens, atEvens : \mathsf{ListNat} \to \mathsf{ListNat} \qquad pwAdd : \mathsf{ListNat} \to \mathsf{ListNat} \to \mathsf{ListNat}$$

Resposta. **Não** repita as tipagens na resposta!

$$\begin{aligned} &takeEvens\ [\,] = [\,] \\ &takeEvens\ (x : xs) = \mathtt{if}\ \ ev\ x\ \ \mathtt{then}\ \ x : takeEvens\ xs\ \ \mathtt{else}\ \ takeEvens\ xs \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &product\ [\,] = \mathsf{S}\ \mathsf{O} \\ &product\ (x : xs) = x \cdot product\ xs \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &addNat\ w\ [\,] = [\,] \\ &addNat\ w\ (x : xs) = (x + w : addNat\ w\ xs) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &atEvens\ [\,] = [\,] \\ &atEvens\ [x] = [x] \\ &atEvens\ (x : xs) = x : atOdds\ xs \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &atOdds\ [\,] = [\,] \\ &atOdds\ [\_] = [\,] \\ &atOdds\ (x : xs) = atEvens\ xs \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &tidy\ [\,] = \mathsf{True} \\ &tidy\ [x] = ev\ x \\ &tidy\ (x_1 : x_2 : xs) = ev\ x_1 \wedge od\ x_2 \wedge tidy\ xs \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &removeAt\ \_\ [\,] = [\,] \\ &removeAt\ \mathsf{O}\ (x : xs) = xs \\ &removeAt\ (\mathsf{S}\ n)\ (x : xs) = x : removeAt\ n\ xs \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &replaceAt\ w\ \_\ [\,] = [\,] \\ &replaceAt\ w\ \mathsf{O}\ (x : xs) = (w : xs) \\ &replaceAt\ w\ (\mathsf{S}\ n)\ (x : xs) = x : replaceAt\ w\ n\ xs \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &addAt\ w\ \_\ [\,] = [\,] \\ &addAt\ w\ \mathsf{O}\ (x : xs) = (x + w) : xs \\ &addAt\ w\ (\mathsf{S}\ n)\ (x : xs) = x : addAt\ w\ n\ xs \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &pwAdd\ [\,]\ \_ = [\,] \\ &pwAdd\ \_\ [\,] = [\,] \\ &pwAdd\ (x : xs)\ (y : ys) = x + y : pwAdd\ xs\ ys \end{aligned}$$

(9) **C**

Demonstração de $(\forall a)\,(\forall b)\,(\forall c)\,\left[\,a^{b\cdot c} = (a^b)^c\,\right]$:

Sejam $a, b : \mathsf{Nat}$. Por indução no c.
Base: $a^{b\cdot 0} = (a^b)^0$. Calculamos:

$$
\begin{aligned}
a^{b\cdot 0} &= a^0 && ((\cdot).1)\\
&= S0 && ((\hat{}\,).1)\\
&= (a^b)^0. && ((\hat{}\,).1^{\leftarrow})
\end{aligned}
$$

Passo indutivo. Seja $k : \mathsf{Nat}$ tal que $a^{b\cdot k} = (a^b)^k$ (HI). Calculamos:

$$
\begin{aligned}
(a^b)^{Sk} &= (a^b)^k \cdot (a^b) && ((\hat{}\,).2 \text{ com } n := a^b,\ m := k)\\
&= a^{b\cdot k} \cdot a^b && (\text{(HI)})\\
&= a^{(b\cdot k)+b} && (\text{(exp-add)})\\
&= a^{b\cdot Sk}. && ((\cdot).2 \text{ com } n := b,\ m := k)
\end{aligned}
$$

(18) **T**

Demonstração de $(\forall n)\,(\forall m)\,[\,n \leq m \text{ ou } m \leq n\,]$:

Por indução.
Base: $(\forall m)\,[\,0 \leq m \text{ ou } m \leq 0\,]$.
Seja $m : \mathsf{Nat}$. Imediato pois $0 \leq m$ (pela $(\leq)$-min).
Passo indutivo.
Seja ℓ tal que $(\forall t)\,[\,\ell \leq t \text{ ou } t \leq \ell\,]$ (HI), i.e.: *ℓ é comparável com todos.*
Agora podemos fechar esta demonstração numa linha só...
Aplicando a $((\leq)$-succ) duas vezes na (HI) chegamos na

$$(\forall t)\,[\,S\ell \leq St \text{ ou } St \leq S\ell\,], \qquad \text{QED.}$$

...ou em muitas:
Preciso demonstrar que $S\ell$ também é comparável com todos.
Seja $a : \mathsf{Nat}$. Vou demonstrar que $S\ell \leq a$ ou $a \leq S\ell$.
Separo em casos sobre o $a : \mathsf{Nat}$:
Caso $a = 0$.
Imediato pois $0 \leq S\ell$.
Caso $a = Sa'$ para algum a'.
Já que ℓ é comparável com todos (pela (HI)), é com o a' também.
Logo separo em casos.
Caso $\ell \leq a'$. Logo $S\ell \leq Sa' = a$ (pela $(\leq)$-succ).
Caso $a' \leq \ell$. Similar.

Só isso mesmo.

exp-add.
$(\forall x)\,(\forall a)\,(\forall b)\,\big[\,x^{a+b} = (x^a)\cdot(x^b)\,\big]\,.$

DEMONSTRAÇÃO.
Sejam $x, a : \mathsf{Nat}$. Por indução.
BASE: $x^{a+0} = x^a \cdot x^0$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
x^{a+0} &= x^a && ((+).1)\\
&= x^a \cdot S0 && (S0 \text{ identidade } ((\cdot)\text{-id}))\\
&= x^a \cdot x^0. && ((^\wedge).1)
\end{aligned}$$

PASSO INDUTIVO. Seja $k : \mathsf{Nat}$ tal que $x^{a+k} = x^a \cdot x^k$. (HI)
Vou demonstrar que $x^{a+Sk} = x^a \cdot x^{Sk}$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
x^{a+Sk} &= x^{S(a+k)} && ((+).2)\\
&= x^{a+k} \cdot x && ((^\wedge).2)\\
&= (x^a \cdot x^k) \cdot x && ((\text{HI}))\\
&= x^a \cdot (x^k \cdot x) && ((\cdot)\text{-assoc.})\\
&= x^a \cdot x^{Sk}. && ((^\wedge).2)
\end{aligned}$$