

---

Nome:

---

Regras:

2022-07-22

- I. Não vires esta página antes do começo da prova.      V.  $(\forall x) [\text{Colar}(x) \implies \neg \text{Passar}(x, \text{FMC1})]$ .<sup>2</sup>  
II. Nenhuma consulta de qualquer forma.      VI. Responda dentro das caixas indicadas.  
III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, etc.).<sup>1</sup>      VII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.  
IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma.      VIII. Escolhe até 1 dos R, S.<sup>3</sup>

Suas respostas precisam ser escritas na linguagem “mid-level” que temos elaborado.

Usamos **Real** para denotar um tipo cujos membros chamamos de (números) reais e onde temos os seguintes componentes primitivos:

$$0, 1 : \text{Real} \quad (+), (\cdot) : \text{Real} \times \text{Real} \rightarrow \text{Real} \quad (-) : \text{Real} \rightarrow \text{Real} \quad (>) : \text{Real} \times \text{Real} \rightarrow \text{Prop.}$$

Estipulamos as proposições seguintes como axiomas:

$$\begin{aligned} (\forall a, b, c)[a + (b + c) &= (a + b) + c] && \text{(RA-Ass)} \\ (\forall a)[0 + a = a = a + 0] && \text{(RA-Id)} \\ (\forall a)[(-a) + a = 0 = a + (-a)] && \text{(RA-Inv)} \\ (\forall a, b)[a + b = b + a] && \text{(RA-Com)} \\ \\ (\forall a, b, c)[a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c] && \text{(RM-Ass)} \\ (\forall a)[a \cdot 1 = a] && \text{(RM-Id)} \\ (\forall a \neq 0)(\exists a')[a' \cdot a = 1 = a \cdot a'] && \text{(RM-Inv*)} \\ (\forall a, b)[a \cdot b = b \cdot a] && \text{(RM-Com)} \\ \\ 0 \neq 1 && \text{(R-NTriv)} \\ (\forall d, a, b)[(a + b) \cdot d = (a \cdot d) + (b \cdot d) \ \& \ d \cdot (a + b) = (d \cdot a) + (d \cdot b)] && \text{(R-Dist)} \\ \\ (\forall a, b, c)[a > b \ \& \ b > c \implies a > c] && \text{(RO-Trans)} \\ (\forall a, b)[\text{e.u.d.}: a > b; a = b; b > a] && \text{(RO-Tri)} \\ (\forall a, b, c)[a > b \implies a + c > b + c] && \text{(RO-A)} \\ (\forall a, b, c)[a > b \ \& \ c > 0 \implies ac > bc] && \text{(RO-M)} \\ \\ (\forall A : \text{Set Real})[A \text{ habitado} \ \& \ A \text{ cotado por cima} \implies A \text{ possui supremum}] && \text{(R-Compl)} \end{aligned}$$

*Boas provas!*

---

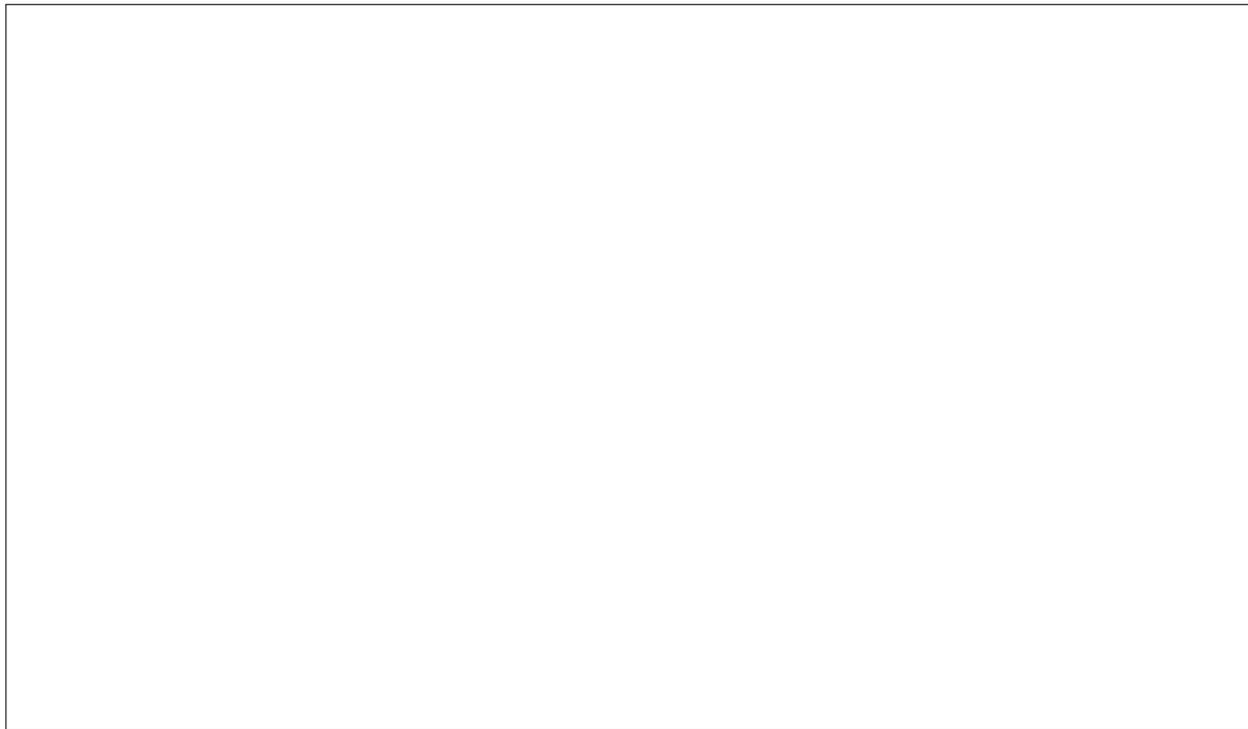
<sup>1</sup>Ou seja, *desligue antes* da prova.

<sup>2</sup>Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

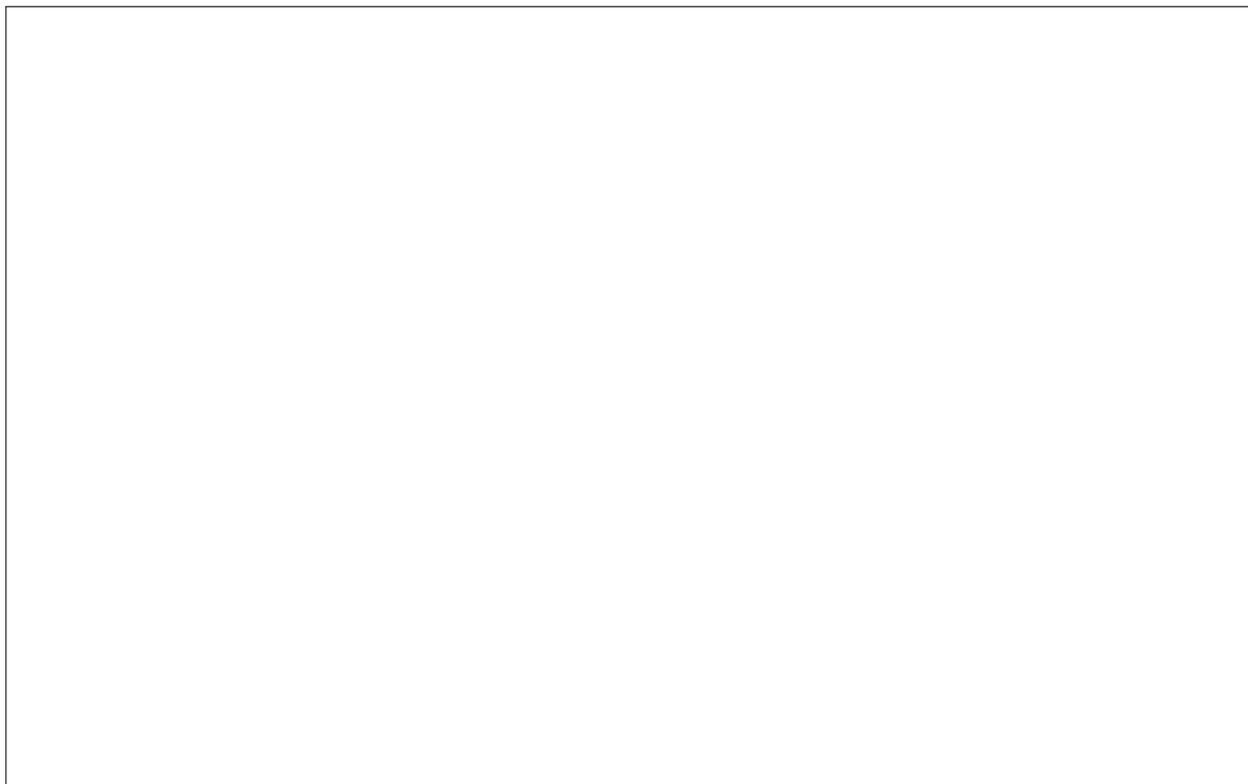
<sup>3</sup>Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(24) **R**

(12) **R1.** Sejam  $a, b$  reais. Existe único  $x$  tal que  $a + x = b$  e único  $x$  tal que  $x + a = b$ .  
DEMONSTRAÇÃO.



(12) **R2.**  $(\forall a, b) [ab = 0 \implies a = 0 \text{ ou } b = 0]$ .  
DEMONSTRAÇÃO.



(76) **S**

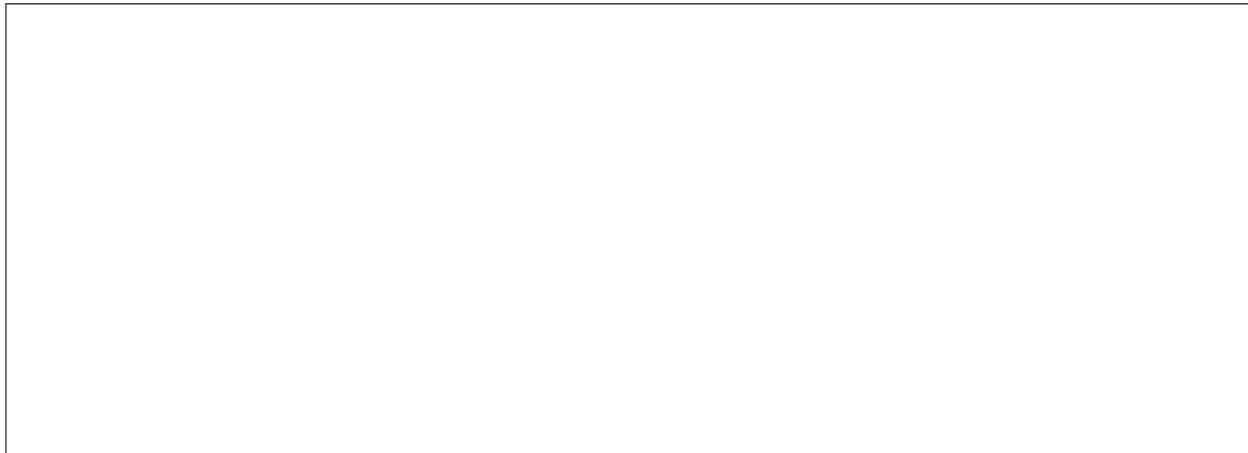
Demonstre **dois** dos teoremas **S1**, **S2**, **S3**.

Podes usar os teoremas que demonstramos sobre os reais na primeira parte da unidade.

Sejam  $(a_n)_n, (b_n)_n$  seqüências de reais.

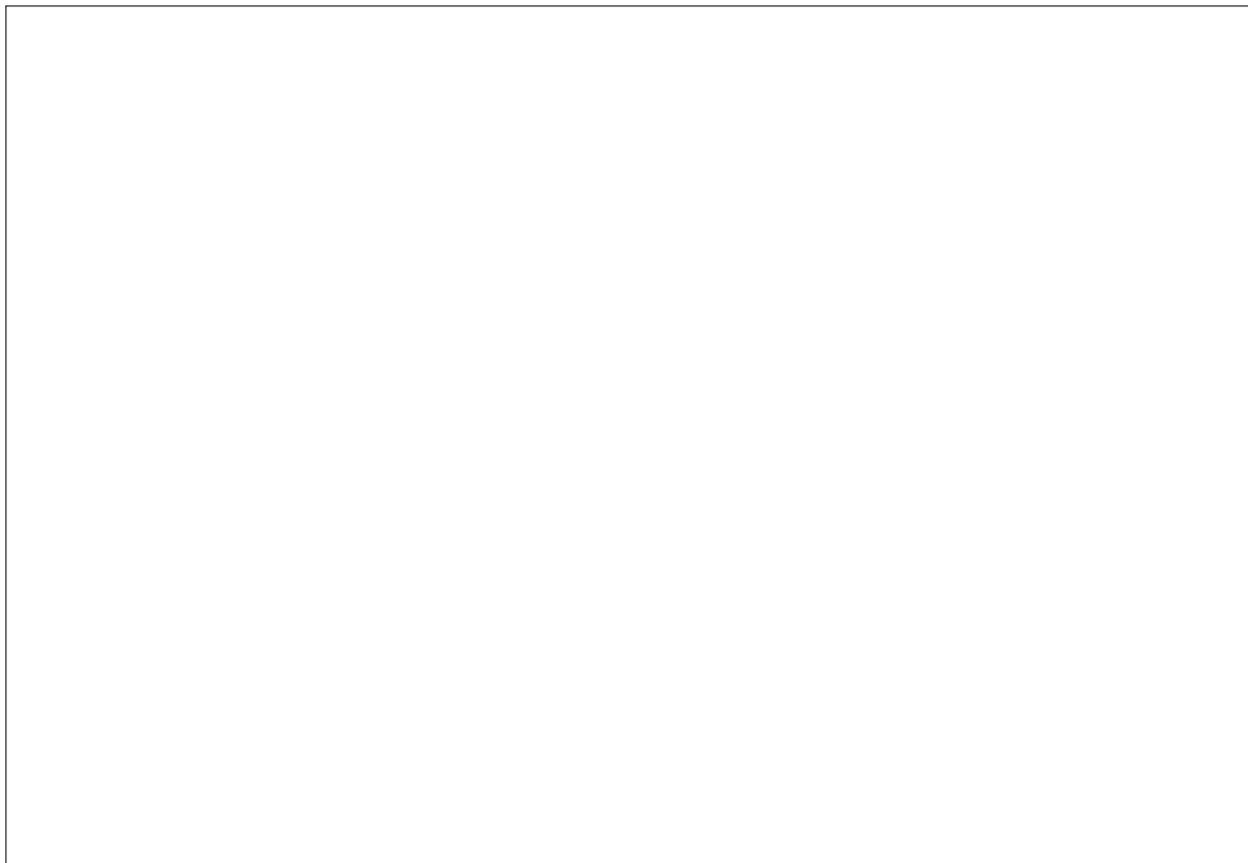
(18) **S1.** Se  $(a_n)_n$  é eventualmente constante, então  $(a_n)_n$  é convergente.

DEMONSTRAÇÃO.



(30) **S2.**  $(a_n)_n \rightarrow a$  &  $(b_n)_n \rightarrow b \implies (a_n + b_n)_n \rightarrow a + b$ .

DEMONSTRAÇÃO.

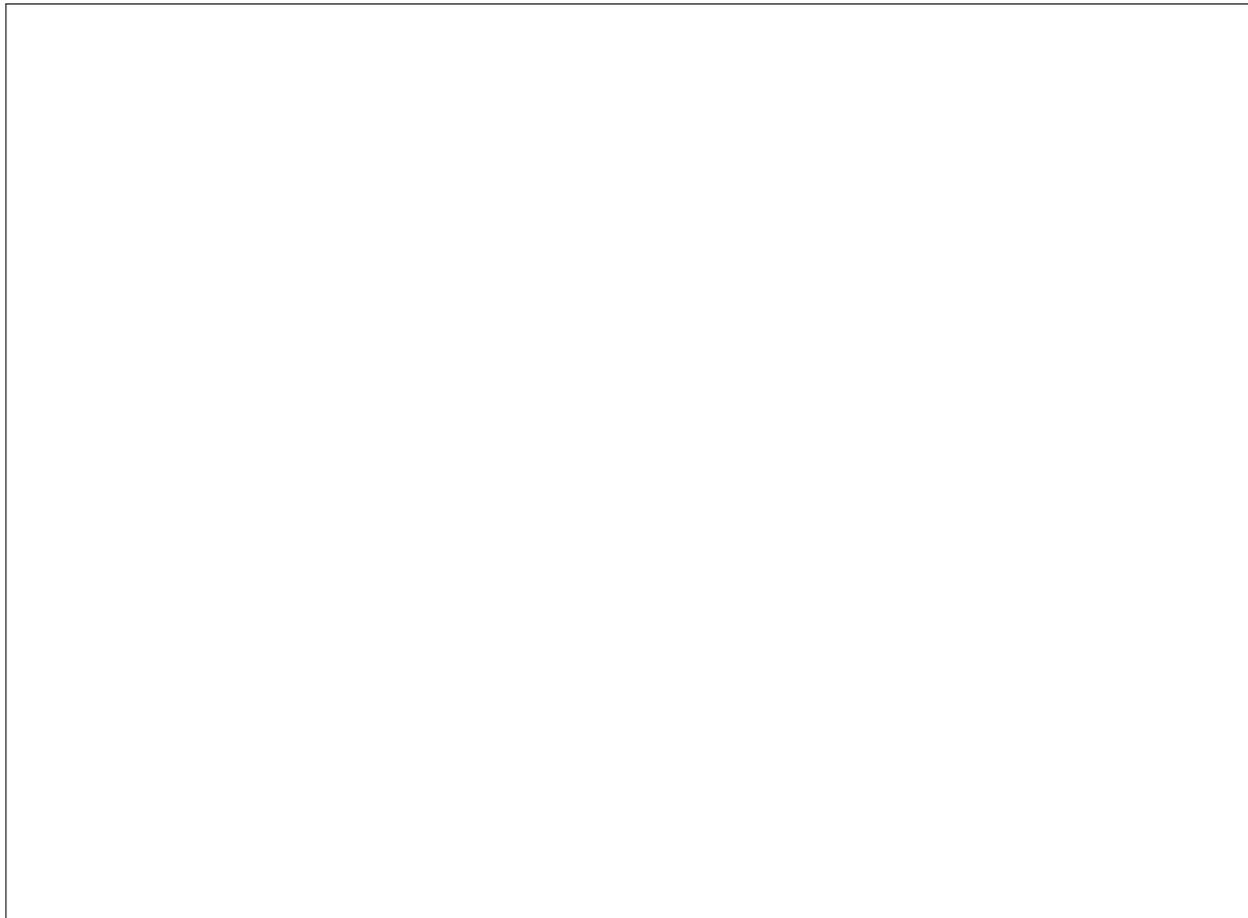


**Definição.** Seja  $(x_n)_n$  seqüência de reais. Dizemos que  $(x_n)_n$  é *Cauchy* sse seus termos eventualmente ficam perto entre si. Formalmente:

$$(x_n)_n \text{ Cauchy} \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall \varepsilon > 0) (\exists N) (\forall i, j \geq N) [d(x_i, x_j) < \varepsilon].$$

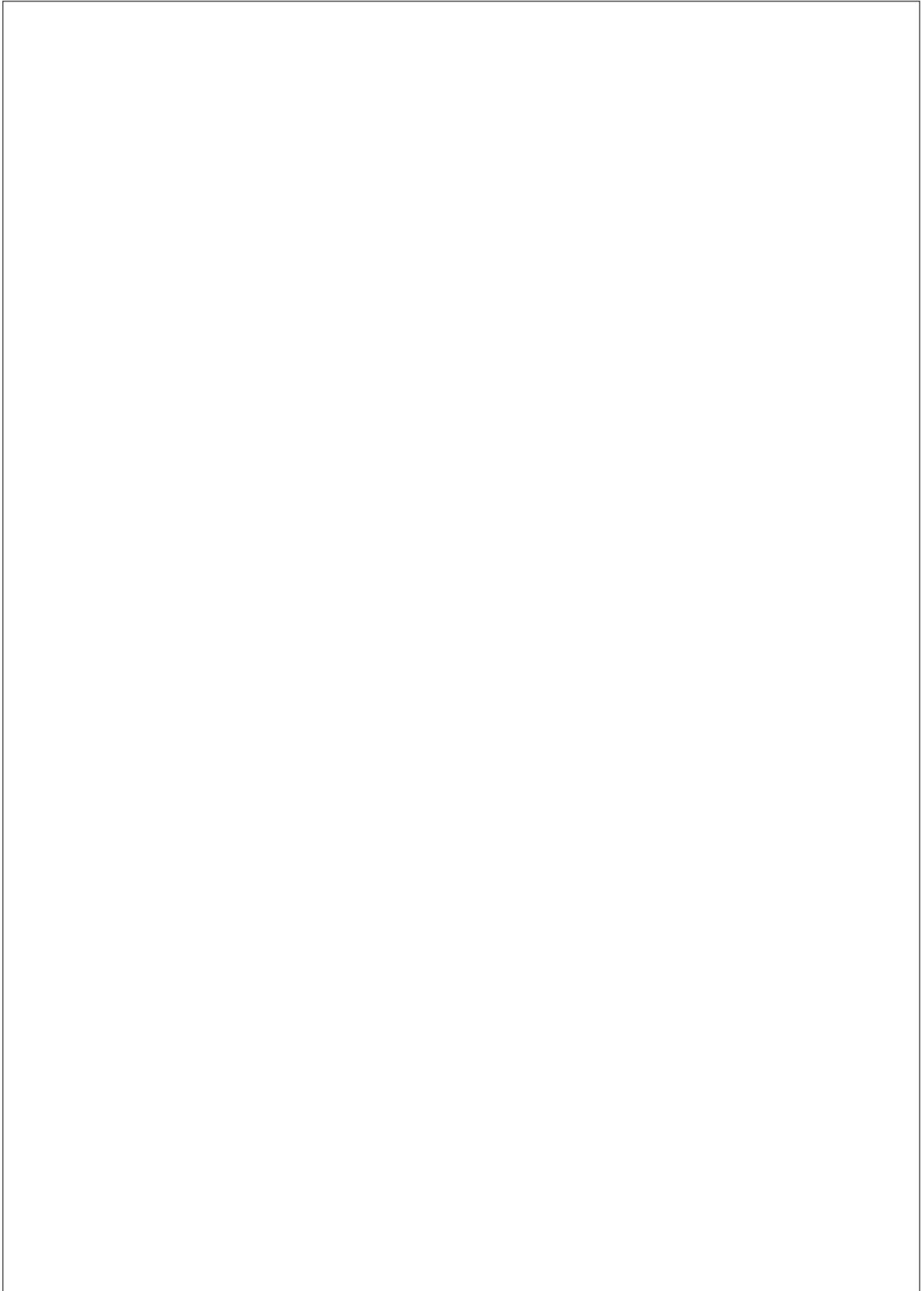
(46) **S3.**  $(a_n)_n$  convergente  $\implies (a_n)_n$  Cauchy.

DEMONSTRAÇÃO.



Só isso mesmo.

## LEMMATA



## RASCUNHO