**FMC1, 2022.1**
(Turma N12 do Thanos)

**Prova 3.1**
(points: 24; bonus: $0^\flat$; time: 32')

---

**Nome:**

---

*2022-07-13*

## Regras:

**I.** Não vires esta página antes do começo da prova.

**II.** Nenhuma consulta de qualquer forma.

**III.** Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

**IV.** Nenhuma comunicação de qualquer forma.

**V.** $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC1})\,]$.[2]

**VI.** Responda dentro das caixas indicadas.

**VII.** Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

## Esclarecimento:

Suas respostas precisam ser escritas na linguagem "mid-level" que temos elaborado.

Usamos Real para denotar um tipo cujos membros chamamos de (números) inteiros e onde temos os seguintes componentes primitivos:

$$0, 1 : \mathsf{Real} \qquad (+), (\cdot) : \mathsf{Real} \times \mathsf{Real} \to \mathsf{Real} \qquad (-) : \mathsf{Real} \to \mathsf{Real} \qquad (>) : \mathsf{Real} \times \mathsf{Real} \to \mathsf{Prop}.$$

Estipulamos as proposições seguintes como axiomas:

$$(\forall a, b, c)[\, a + (b + c) = (a + b) + c\,] \qquad \text{(RA-Ass)}$$
$$(\forall a)[\, 0 + a = a = a + 0\,] \qquad \text{(RA-Id)}$$
$$(\forall a)[\, (-a) + a = 0 = a + (-a)\,] \qquad \text{(RA-Inv)}$$
$$(\forall a, b)[\, a + b = b + a\,] \qquad \text{(RA-Com)}$$

$$(\forall a, b, c)[\, a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c\,] \qquad \text{(RM-Ass)}$$
$$(\forall a)[\, a \cdot 1 = a\,] \qquad \text{(RM-Id)}$$
$$(\forall a)\left[\, a \neq 0 \implies (\exists a')\left[\, a' \cdot a = 1 = a \cdot a'\,\right]\right] \qquad \text{(RM-Inv*)}$$
$$(\forall a, b)[\, a \cdot b = b \cdot a\,] \qquad \text{(RM-Com)}$$

$$0 \neq 1 \qquad \text{(R-NTriv)}$$
$$(\forall d, a, b)[\, (a + b) \cdot d = (a \cdot d) + (b \cdot d) \;\;\&\;\; d \cdot (a + b) = (d \cdot a) + (d \cdot b)\,] \qquad \text{(R-Dist)}$$

$$(\forall a, b, c)[\, a > b \;\;\&\;\; b > c \implies a > c\,] \qquad \text{(RO-Trans)}$$
$$(\forall a, b)[\, \text{e.u.d.: } a > b;\; a = b;\; b > a\,] \qquad \text{(RO-Tri)}$$
$$(\forall a, b, c)[\, a > b \implies a + c > b + c\,] \qquad \text{(RO-A)}$$
$$(\forall a, b, c)[\, a > b \;\;\&\;\; c > 0 \implies ac > bc\,]. \qquad \text{(RO-M)}$$

*Boas provas!*

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

CENSORED!

(18) **A**

Demonstre **até um** dos teoremas **A1**, **A2**, **A3**.

(8) **A1.** Sejam $a, b$ reais. [redacted] e [redacted] [redacted] [redacted].

DEMONSTRAÇÃO.

(12) **A2.** $(\forall a, b)\,[$ [redacted] $]$.

DEMONSTRAÇÃO.

(18) **A3.** Seja $(a_n)_n$ a seqüência definida pelas

$$a_0 \stackrel{\text{def}}{=} \text{[redacted]}$$
$$a_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \text{[redacted]}$$

Demonstre que $(a_n)_n$ é (i) limitada superiormente; (ii) estritamente crescente.

Demonstração.

(6) **B**

Defina uma seqüência de intervalos abertos [redacted] interseção [redacted].
Escreva qual é mesmo o [redacted], sem demonstrar tal igualdade.

Definições.

Só isso mesmo.