FMC1, 2022.1
(Turma N12 do Thanos)

Prova 2.1
(points: 24; bonus: $0^\flat$; time: 32’)

Nome: Θάνος **Gabarito**

2022-06-08

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC1})\,]$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

Definem-se:

Definimos os tipos de dados:

```
type Nat where          type Bool where
  O : Nat                 True : Bool
  S : Nat → Nat           False : Bool
```

Definimos as operações

$(+) : \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat}$

(O-a) $0 + n = n$

(S-a) $Sm + n = S(m + n)$

$(\cdot) : \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat}$

(m-O) $n \cdot 0 = 0$

(m-S) $n \cdot Sm = n \cdot m + n$

e atribuimos em ambas associatividade (sintáctica) esquerda. Atribuímos também precedência (sintáctica) mais alta para o $(\cdot)$.

Esclarecimento:

Suas demonstrações/refutações precisam ser escritas em português matemático (linguagem “mid-level” que temos elaborado nas aulas).

Boas provas!

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

(24) # I

(4) **I1.** Defina recursivamente a função $isMul_3 : \mathsf{Nat} \to \mathsf{Bool}$ que retorna True sse sua entrada é múltiplo de 3.
DEFINIÇÃO.

$$
\begin{aligned}
isMul_3 &: \mathsf{Nat} \to \mathsf{Bool} \\
isMul_3\ \mathsf{O} &= \mathsf{True} \\
isMul_3\ \mathsf{SO} &= \mathsf{False} \\
isMul_3\ \mathsf{SSO} &= \mathsf{False} \\
isMul_3\ \mathsf{SSS}n &= isMul_3\ n
\end{aligned}
$$

(20) **I2.** Demonstre a distributividade pela esquerda da $(\cdot)$ sobre a $(+)$, ou seja:

$$(\forall x : \mathsf{Nat})\,(\forall y : \mathsf{Nat})\,(\forall z : \mathsf{Nat})\,[\,x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z\,]$$

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam $x, y, z : \mathsf{Nat}$.
Por indução no y.
Base: $x \cdot (\mathsf{O} + z) \stackrel{?}{=} x \cdot \mathsf{O} + x \cdot z$
Calculamos:

$$
\begin{aligned}
x \cdot (\mathsf{O} + z) &= x \cdot z && \text{(pela (O-a))} \\
x \cdot \mathsf{O} + x \cdot z &= \mathsf{O} + x \cdot z && \text{(pela (m-O))} \\
&= x \cdot z && \text{(pela (O-a))}
\end{aligned}
$$

Passo Indutivo.
Seja $k : \mathsf{Nat}$ tal que $x \cdot (k + z) = x \cdot k + x \cdot z$.
Vou demonstrar $x \cdot (\mathsf{S}k + z) = x \cdot \mathsf{S}k + x \cdot z$.
Calculamos:

$$
\begin{aligned}
x \cdot (\mathsf{S}k + z) &= x \cdot \mathsf{S}(k + z) && \text{(pela (S-a))} \\
&= x \cdot (k + z) + x && \text{(pela (m-S))} \\
&= (x \cdot k + x \cdot z) + x && \text{(pela (H.I.))} \\
&= x \cdot k + (x \cdot z + x) && \text{(pela (+)-ass)} \\
&= x \cdot k + (x + x \cdot z) && \text{(pela (+)-com)} \\
&= (x \cdot k + x) + x \cdot z && \text{(pela (+)-ass)} \\
&= x \cdot \mathsf{S}k + x \cdot z. && \text{(pela (m-S)}^{\leftarrow}\text{)}
\end{aligned}
$$

Só isso mesmo.

Associatividade da $(+)$.

$$(\forall x, y, z : \mathsf{Nat})\,[\,(x+y)+z = x+(y+z)\,]\,.$$

DEMONSTRAÇÃO.
Sejam $x, y, z : \mathsf{Nat}$.
Por indução no x.
Base.
Calculamos:

$$\begin{aligned} (\mathsf{O}+y)+z &= y+z && \text{(pela (O-a))} \\ \mathsf{O}+(y+z) &= y+z. && \text{(pela (O-a))} \end{aligned}$$

Passo Indutivo.
Seja $k : \mathsf{Nat}$ tal que $(k+y)+z = k+(y+z)$.
Calculamos:

$$\begin{aligned} (\mathsf{S}k+y)+z &= \mathsf{S}(k+y)+z && \text{(pela (S-a))} \\ &= \mathsf{S}((k+y)+z) && \text{(pela (S-a))} \\ &= \mathsf{S}(k+(y+z)) && \text{(pela (H.I.))} \\ &= \mathsf{S}k+(y+z). && \text{(pela (S-a)}^{\leftarrow}\text{)} \end{aligned}$$

Lemma (a-S).

$$(\forall x, y : \mathsf{Nat})\,[\,\mathsf{S}(x+y) = x+\mathsf{S}y\,]\,.$$

DEMONSTRAÇÃO.
Sejam $x, y : \mathsf{Nat}$.
Por indução no x.
Base.
Calculamos:

$$\begin{aligned} \mathsf{S}(\mathsf{O}+y) &= \mathsf{S}y && \text{(pela (O-a))} \\ &= \mathsf{O}+\mathsf{S}y. && \text{(pela (O-a)}^{\leftarrow}\text{)} \end{aligned}$$

Passo indutivo.
Seja $k : \mathsf{Nat}$ tal que $\mathsf{S}(k+y) = k+\mathsf{S}y$.
Calculamos:

$$\begin{aligned} \mathsf{S}(\mathsf{S}k+y) &= \mathsf{SS}(k+y) && \text{(pela (S-a)}^{\leftarrow}\text{)} \\ &= \mathsf{S}(k+\mathsf{S}y) && \text{(pela (H.I.))} \\ &= \mathsf{S}k+\mathsf{S}y. && \text{(pela (S-a)}^{\leftarrow}\text{)} \end{aligned}$$

Comutatividade da $(+)$.

$$(\forall x, y : \mathsf{Nat})\,[\,x+y = y+x\,]\,.$$

DEMONSTRAÇÃO.
Por indução no x.
Base: $\mathsf{O}+y \overset{?}{=} y+\mathsf{O}$.
Por indução no y.
Base: $\mathsf{O}+\mathsf{O} \overset{?}{=} \mathsf{O}+\mathsf{O}$.
Trivial (refl).
Passo indutivo.
Seja $k : \mathsf{Nat}$ tal que $\mathsf{O}+k = k+\mathsf{O}$.
Calculamos:

$$\begin{aligned} \mathsf{O}+\mathsf{S}k &= \mathsf{S}k && \text{(pela (O-a))} \\ &= \mathsf{S}(\mathsf{O}+k) && \text{(pela (O-a)}^{\leftarrow}\text{)} \\ &= \mathsf{S}(k+\mathsf{O}) && \text{(pela (H.I.))} \\ &= \mathsf{S}k+\mathsf{O}. && \text{(pela (S-a))} \end{aligned}$$

Passo indutivo.
Seja $k : \mathsf{Nat}$ tal que $k+y = y+k$.
Calculamos:

$$\begin{aligned} \mathsf{S}k+y &= \mathsf{S}(k+y) && \text{(pela (S-a))} \\ &= \mathsf{S}(y+k) && \text{(pela (H.I.))} \\ &= y+\mathsf{S}k. && \text{(pelo (a-S))} \end{aligned}$$