

---

Nome:

---

2022-04-18

**Regras:**

- I. Não vires esta página antes do começo da prova.
- II. Nenhuma consulta de qualquer forma.
- III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).<sup>1</sup>
- IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.
- V.  $(\forall x) [\text{Colar}(x) \implies \neg \text{Passar}(x, \text{FMC1})]$ .<sup>2</sup>
- VI. Use caneta para tuas respostas.
- VII. Responda dentro das caixas indicadas.
- VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.
- IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.
- X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

**Lembram-se:**

**Dados.** Os inteiros  $(\mathbb{Z}; 0, 1, +, -, \cdot)$  com tipos:

$$0 : \text{Int} \quad 1 : \text{Int} \quad + : \text{Int} \times \text{Int} \rightarrow \text{Int} \quad - : \text{Int} \rightarrow \text{Int} \quad \cdot : \text{Int} \times \text{Int} \rightarrow \text{Int}.$$

**Axiomas (até agora).**

(ZA-Ass)	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	(ZM-Ass)
(ZA-IdR)	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$	(ZM-IdR)
(ZA-Com)	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$	(ZM-Com)
(ZA-InvR)	$a + (-a) = 0$		
(ZB-DistR)	$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	$a \cdot b = 0 \implies a = 0 \text{ ou } b = 0$	(ZB-NZD)

**Esclarecimento:**

Suas demonstrações/refutações precisam ser na linguagem “low-level” que temos elaborado nas aulas. (Escreva apenas a parte de “código”. *Não inclua* os Dados/Alvo no teu texto!)

*Boas provas!*

---

<sup>1</sup>Ou seja, *desligue antes* da prova.

<sup>2</sup>Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

(8) **A**

Usando os:  $\rightarrow$ ,  $\times$ ,  $(, )$ , e os `Var`, `Nat`, `Int`, `Real`, `String`, `Set`, `Prop`, `Cmd`, `Type`, `Obj`, `Person` atribua a tipagem que tu considera melhor para os seguinte:

Obs.: as linhas representam “buracos” ou “lacunas”.

A mãe de \_\_\_\_\_ tem \_\_\_\_\_ filhos. :

\_\_\_\_\_ + 3  $\leq$  12. :

o pai de \_\_\_\_\_ :

\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ | \_\_\_\_\_ . :

Seja \_\_\_\_\_ inteiro. :

Suponha \_\_\_\_\_ . :

A palavra \_\_\_\_\_ tem tamanho \_\_\_\_\_ . :

Seja  $x$  \_\_\_\_\_ tal que \_\_\_\_\_ . :

(8) **B**

Estamos no mundo dos inteiros  $(\mathbb{Z}; 0, 1, +, -, \times)$ .

(4) **B1.** Defina (com definição completa, em português matemático) a relação  $|$  de *divide*, e o predicado  $\text{Odd}(\_)$  de «ser ímpar».

(2) DEFINIÇÃO (DIVIDE).

(2) DEFINIÇÃO (ÍMPAR).

(4) **B2.** (+)-cancelamento pela esquerda.

Para quaisquer inteiros  $a, u, v$ ,

$$a + u = a + v \implies u = v.$$

DEMONSTRAÇÃO.

(8) **C**

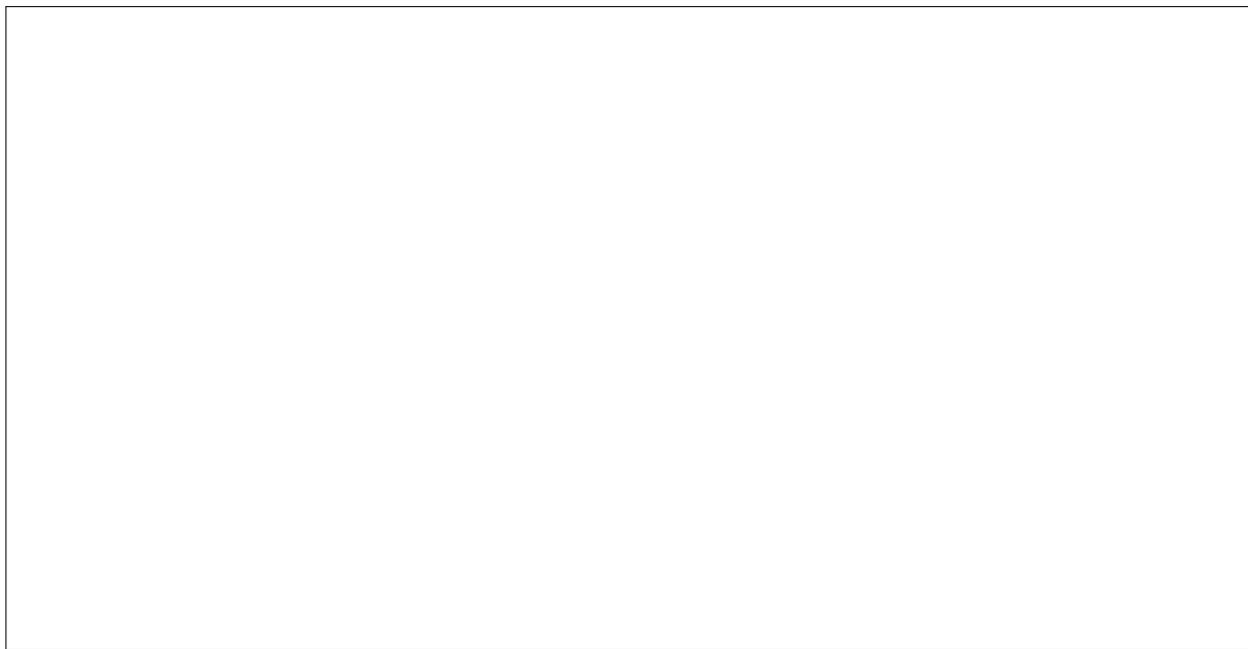
Demonstre completamente **até um** dos teoremas seguintes:

(6) **C1.** Demonstre que *para quaisquer  $a, b$  inteiros, a equação*

$$a + x = b$$

com incógnito  $x$  tem resolução única, ou seja: existe único inteiro  $x$  tal que  $a + x = b$ .

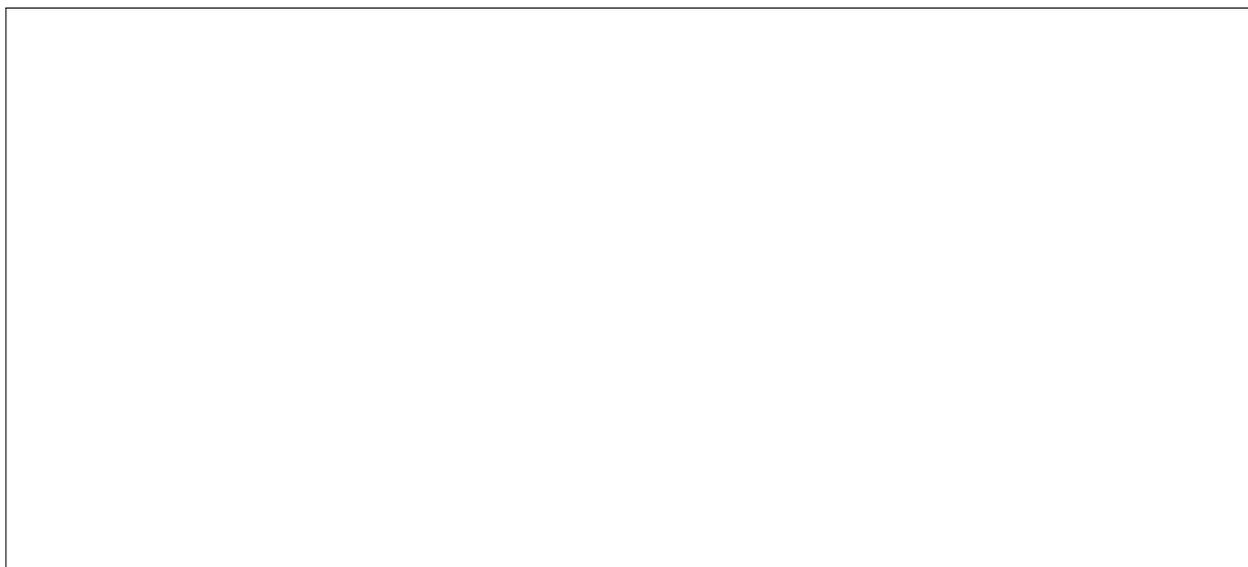
DEMONSTRAÇÃO.



(8) **C2.** Zero é um  $(\cdot)$ -anihilador esquerdo.

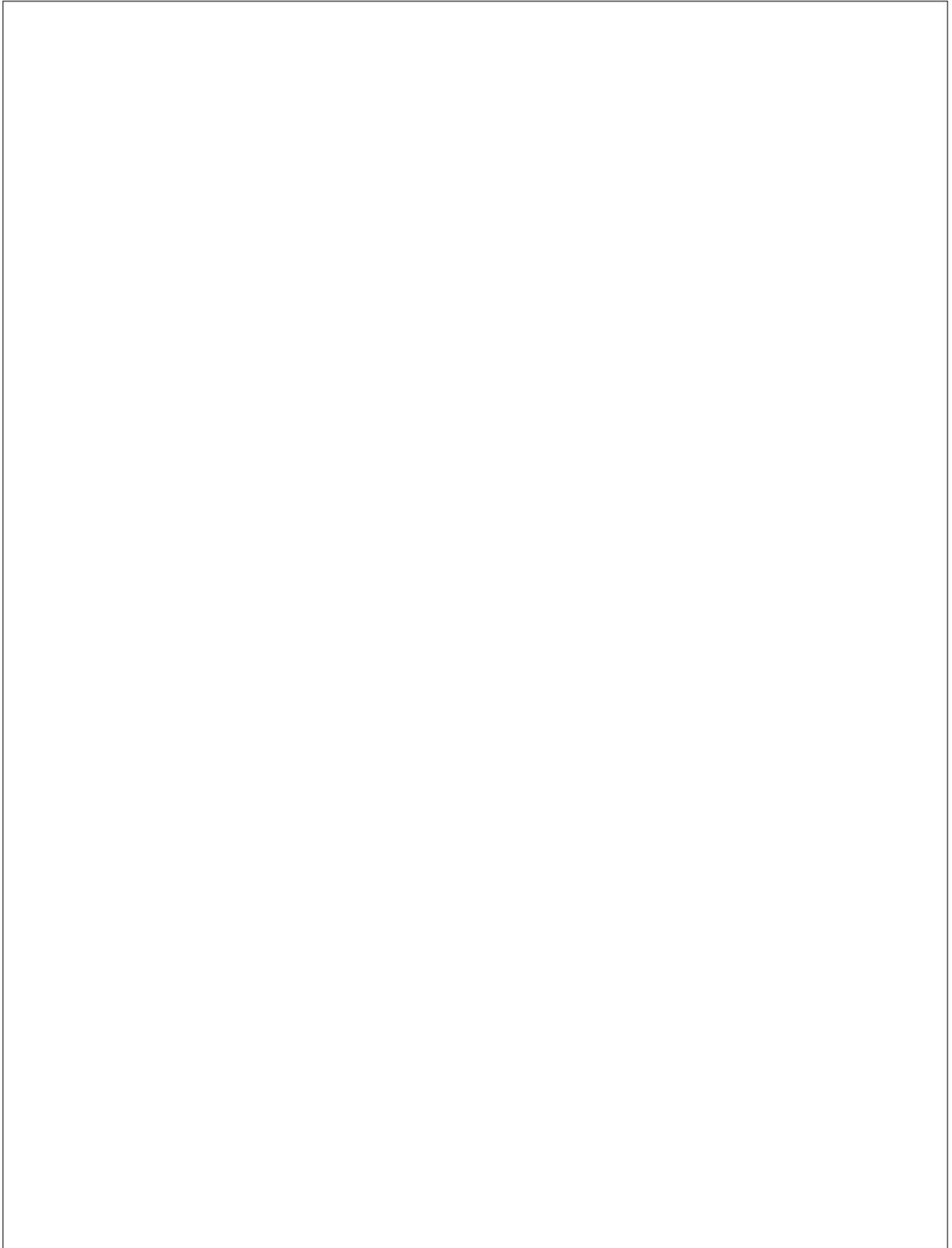
Para qualquer inteiro  $x$ ,  $0 \cdot x = 0$ .

DEMONSTRAÇÃO.



Só isso mesmo.

## LEMMATA



## RASCUNHO

## RASCUNHO