FMC1, 2021.2

Professor: Θάνος

Problem Set 2

(points: $100 + 16^\flat$; deadline: 23/01/2022, 23h59)

Regras e esclarecimentos.

(1) Podes citar como lemma (sem demonstrar) *apenas:* (i) teoremas que são *demonstrados* no fmcbook; (ii) teoremas que demonstramos na U1 no NNG.

(2) Nenhuma outra consulta ou colaboração é permitida.

(3) Todo o Problem Set está no mundo dos naturais; não dos inteiros! Isso tem uma conseqüência boa e uma ruim: (i) Podes citar como lemma gratuito (sem demonstrar) qualquer teorema que já demonstramos na U1 (incluindo os teoremas do NNG). (ii) Não podes usar operações e relações de inteiros. Por exemplo, não podes usar subtração: se na tua prova aparecer uma expressão que envolve subtração, seria um type error e tua demonstração sequer compilaria!

(4) O E1 precisa ser resolvido por indução, e o E2 por recursão.

(5) O E1 possui duas partes: existência (E1E) e unicidade (E1U). (i) Para a existência é obrigatório usar indução (em forma essencial). (ii) Para a unicidade não—mas a verdade é que aqui o uso de indução será provavelmente escondido nas demonstrações de lemmas citados-e-já-demonstrados e não explicitamente exposto no texto da tua demonstração.

(64 pts) **Problema E1.**
Demonstre *por indução* o teorema da divisão de Euclides para naturais: *para quaisquer naturais a, b com $b \neq 0$, existem únicos naturais q, r tais que: (i) $a = bq + r$; (ii) $r < b$.*

($16^\flat$ pts) **Problema E2.**
Define *recursivamente* as funções *rem* e *quot* nos naturais. Considere que seu segundo argumento necessariamente terá a forma Sb para algum natural b. Exemplos de "input–output":

$$\begin{array}{ccc} \mathit{quot}(18,3) = 6 & \mathit{quot}(13,5) = 2 & \mathit{quot}(7,12) = 0 \\ \mathit{rem}(18,3) = 0 & \mathit{rem}(13,5) = 3 & \mathit{rem}(7,12) = 7. \end{array}$$

(36 pts) **Problema F.**
Definimos a seqüência dos números Fibonacci pelas

$$F_0 = 0 \qquad F_{S0} = 1 \qquad F_{SSn} = F_{Sn} + F_n.$$

Demonstre que para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$,

$$F_{S(m+n)} = F_{Sm}F_{Sn} + F_mF_n.$$