FMC1, 2021.2

Professor: Θάνος

Problem Set 1

(points: 52; deadline: 15/12/2021, 23h59)

Student: *Θάνος* **(gabarito)**

Regras.

(I) Escolha **até dois** problemas para resolver.
(II) Podes citar como lemma (sem demonstrar) *apenas* resultados que são *demonstrados* no fmcbook.
(III) Nenhuma outra consulta ou colaboração é permitida.

Definição.
Sejam a, b racionais. Dizemos que a *explode* b ($a \parallel b$) sse existe inteiro k tal que $a^k = b$.

Definição.
Sejam $+$ e $\cdot$ as operações definidas recursivamente pelas:

$$\begin{aligned} &\text{(a1)} \quad n + 0 = n && \text{(m1)} \quad n \cdot 0 = 0 \\ &\text{(a2)} \quad n + Sm = S(n + m) && \text{(m2)} \quad n \cdot Sm = (n \cdot m) + n. \end{aligned}$$

Definição.
Definimos as $\leq$ e $<$ nos naturais pelas

$$\begin{aligned} n \leq m &\overset{\text{def}}{\iff} \text{existe natural } w \text{ tal que } n + w = m \\ n < m &\overset{\text{def}}{\iff} \text{existe natural } w \text{ tal que } n + Sw = m. \end{aligned}$$

(8 pts) **Problema 0.**
Demonstre ou refute: *para quaisquer $a, x, y \in \mathbb{Q}$, se $a \parallel x$ e $a \parallel y$, então para quaisquer inteiros u, v, $a \parallel x^u y^v$.*

Demonstração.
Sejam a, x, y racionais tais que $a \parallel x$ e $a \parallel y$, e logo sejam i, j tais que $a^i = x$ (1) e $a^j = y$ (2). Sejam u, v inteiros. Pelas (1),(2) temos $x^u y^v = (a^i)^u (a^j)^v = a^{iu} a^{jv} = a^{iu+jv}$ e como $iu + jv \in \mathbb{Z}$, logo $a \parallel x^u y^v$. ∎

(12 pts) **Problema 1.**
Demonstre ou refute: *para quaisquer naturais a, b, c, se $a \leq b$ e $b < c$ então $a < c$.*

Demonstração.
Sejam a, b, c naturais tais que $a \leq b$ e $b < c$. Logo sejam u, v naturais tais que $a + u = b$ e $b + Sv = c$. Calculamos:

$$
\begin{aligned}
c &= b + Sv && \text{(pela escolha de } v\text{)} \\
&= (a + u) + Sv && \text{(pela escolha de } u\text{)} \\
&= a + (u + Sv) && \text{(associatividade da } +\text{)} \\
&= a + S(u + v) && \text{(pela (a2))}
\end{aligned}
$$

e logo $a < c$ (pois $u + v \in \mathbb{N}$). ∎

(18 pts) **Problema 2.**
Demonstre as leis de cancelamento para a adição:

$$(\forall t, a, b \in \mathbb{N})[\, t + a = t + b \implies a = b\,]$$
$$(\forall t, a, b \in \mathbb{N})[\, a + t = b + t \implies a = b\,].$$

Demonstração.
Demonstrarei primeiramente o cancelamento à direita. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Por indução no t.
Base. Suponha $a + 0 = b + 0$. Calculando temos $a + 0 = a$ e $b + 0 = b$ e logo $a = b$.
Passo indutivo. Seja k tal que $a + k = b + k$ implica $a = b$. Preciso demonstrar que $a + Sk = b + Sk$ também implica $a = b$. Suponha $a + Sk = b + Sk$. Logo $S(a + k) = S(b + k)$ (pela (a2)), e já que S é injectiva temos $a + k = b + k$, e pela H.I. segue $a = b$.

Agora o cancelamento à esquerda é um corolário imediato graças a comutatividade da adição, pois para quaisquer t, a, b naturais temos:

$$\begin{aligned} t + a = t + b &\implies a + t = b + t && \text{(comutatividade da +)} \\ &\implies a = b. && \text{(cancelando os } t\text{)} \end{aligned}$$

∎

(26 pts) **Problema 3.**
Divulgando o LEM (princípio do terceiro excluído) tentei vender a idéia que seria essencial para demonstrar mais proposições do que realmente é! Com as definições de par e ímpar seguintes

$$n \text{ par} \overset{\text{def}}{\iff} (\exists k \in \mathbb{N})[\, n = k + k \,]$$
$$n \text{ ímpar} \overset{\text{def}}{\iff} (\exists k \in \mathbb{N})[\, n = S(k + k) \,]$$

e sem usar nenhum dos feitiços que discutimos (LEM, Reductio ad Absurdum, Lei da Dupla Negação, etc.) demonstre por indução a proposição: *todo número natural é par ou ímpar.*

Demonstração.
Por indução.
BASE. Temos que 0 é par pois $0 = 0 + 0$.
PASSO INDUTIVO. Seja k natural tal que k par ou k ímpar. Separamos em casos.
CASO k PAR. Vou demonstrar que Sk é ímpar. Como k é par, seja u tal que $k = u + u$. Logo $Sk = S(u + u)$ e como $u \in \mathbb{N}$, Sk é ímpar.
CASO k ÍMPAR. Vou demonstrar que Sk é par. Como k é ímpar, seja u tal que $k = S(u + u)$. Calculamos

$$\begin{aligned} Sk &= SS(u + u) && \text{(pela escolha do } u\text{)} \\ &= S(u + Su) && \text{(pela (a2)}^{\leftarrow}\text{)} \\ &= S(Su + u) && \text{(pelo } (\Lambda 4.39)^{\leftarrow}\text{)} \\ &= Su + Su && \text{(pela (a2)}^{\leftarrow} \text{ com } n := Su;\ m := u\text{)} \end{aligned}$$

e como $Su \in \mathbb{N}$, Sk é par. ∎

(26 pts) **Problema 4.**
Demonstre a lei de cancelamento pela esquerda para a multiplicação: *para qualquer $t \in \mathbb{N}$ não nulo, e quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$, se $ta = tb$ então $a = b$.*

Demonstração.
Seja $t \neq 0$. Por indução no b.
BASE. Seja a natural e suponha $ta = t0$. Logo $ta = 0$ (pela (m1)). Vamos demonstrar que $a = 0$. Como $ta = 0$ temos $t = 0$ ou $a = 0$ (pelo Lemma 1). A primeira alternativa é impossível pois $t \neq 0$, e logo $a = 0$.
PASSO INDUTIVO. Seja k tal que

$$(\forall x \in \mathbb{N})[\, tx = tk \implies x = k\,]. \tag{H.I.}$$

Vou demonstrar que

$$(\forall a \in \mathbb{N})[\, ta = tSk \implies a = Sk\,].$$

Seja a natural tal que $ta = tSk$ [(1)]. Preciso mostrar que $a = Sk$. Separamos em casos sobre o a:
CASO $a = 0$. Vou mostrar que este caso é impossível. Temos $tSk = ta = t0 = 0$. Como $tSk = 0$, pelo Lemma 1 segue que $t = 0$ ou $Sk = 0$: mas no caso $t = 0$ estamos contradizendo que $t \neq 0$; e o caso $Sk = 0$ é impossível pela 4.13.
CASO a É UM SUCESSOR. Logo seja a' natural tal que $a = Sa'$. Basta verificar que $a' = k$ segue pela (1):

$$\begin{aligned}
ta = tSk &\implies tSa' = tSk && \text{(pela escolha do } a'\text{)}\\
&\implies ta' + t = tk + t && \text{((m2) em cada lado)}\\
&\implies ta' = tk && \text{(cancelando os } +t\text{)}\\
&\implies a' = k. && \text{(pela H.I. com } x := a'\text{)}
\end{aligned}$$

∎

Lemma 1.
Para quaisquer naturais a, b, se $ab = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$.

Demonstração.
Sejam a, b naturais tais que $ab = 0$. Separamos em casos sobre os a e b: os três casos onde pelo menos um dos a, b é 0 são imediatos. Basta demonstrar que o caso onde ambos são sucessores é impossível. Sejam a', b' tais que $a = Sa'$ e $b = Sb'$. Vou chegar numa contradição mostrando que neste caso o 0 é um sucessor (assim contradizendo o 4.13). Calculamos:

$$\begin{aligned}
0 &= ab && \text{(hypótese)}\\
&= aSb' && \text{(pela escolha do } b'\text{)}\\
&= ab' + a && \text{(pela (m2))}\\
&= ab' + Sa' && \text{(pela escolha do } a'\text{)}\\
&= S(ab' + a'). && \text{(pela (a2) com } n := ab';\ m := a'\text{)}
\end{aligned}$$

∎