FMC1, 2020.6

Professor: Thanos

Problem Set 1.2

(points: 30; deadline: 20/10/2020, 23h59)

Problema 1.
Com as definições das operações do capítulo «Naturais; recursão; indução», demonstre a distributividade esquerda da $\cdot$ sobre a $+$ nos naturais:

$$(\forall x)(\forall a)\,(\forall b)[\,x \cdot (a+b) = (x \cdot a) + (x \cdot b)\,]$$

Das propriedades de operações podes apenas considerar como dada a associatividade da $+$.

Problema 2.
Divulgando o LEM (princípio do terceiro excluido) tentei vender a idéia que seria essencial para demonstrar mais proposições do que realmente é! Com as definições de par e ímpar seguintes

$$n \text{ par} \overset{\text{def}}{\iff} (\exists k \in \mathbb{Z})[\,n = 2k\,]$$
$$n \text{ ímpar} \overset{\text{def}}{\iff} (\exists k \in \mathbb{Z})[\,n = 2k+1\,]$$

e sem usar nenhum dos feitiços que discutimos (LEM, Reductio ad Absurdum, Lei da dupla negação, etc.) demonstre diretamente (por indução) a proposição: *todo número natural é par ou ímpar.*

Problema 3.
Considere a funcção recursiva $\alpha : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definida pelas equações:

$$\alpha(0,x) = x+1 \tag{K1}$$
$$\alpha(n+1,0) = \alpha(n,1) \tag{K2}$$
$$\alpha(n+1,x+1) = \alpha(n,\alpha(n+1,x)) \tag{K3}$$

(i) Demonstre que para todo $x \in \mathbb{N}$, $\alpha(1,x) = x+2$.

(ii) Dado que para todo $x \in \mathbb{N}$, $\alpha(2,x) = 2x+3$, demonstre que para todo $x \in \mathbb{N}$, $\alpha(3,x) = 2^{x+3} - 3$.