FMC1, 2019.2
(Turma N12 do Thanos)

Prova 3.1
(points: 28; bonus: $8^\flat$; time: 90')

Nome:

18/11/2019

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\text{Colar}(x) \implies \neg\text{Passar}(x, \text{FMC1})\,]$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

XI. Os pontos bônus podem ser usados para aumentar uma nota de qualquer unidade, dado que a nota original é pelo menos 5,0.[3]

Lembram-se:

Definição. Dados $n, k \in \mathbb{N}$ denotamos por $C(n,k)$ a quantidade de maneiras que podemos escolher k objetos (sem repetições) de n objetos (distintos).

Definição. Sejam a, b inteiros. Um inteiro d é um *maior divisor comum* dos a, b sse d é um divisor comum dos a, b, divisível por todo divisor comum dos a, b.

$$d \text{ é um m.d.c dos } a, b \overset{\text{def}}{\iff} d \mid a \;\&\; d \mid b \;\&\; (\forall c)\,[\,c \mid a \;\&\; c \mid b \implies c \mid d\,]\,.$$

Denotamos por $\gcd(a,b)$ ou por (a,b) o maior divisor comum não negativo dos a, b.

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

(18) **A**

Sejam p primo e m inteiro positivo.
Demonstre completamente **até um** dos teoremas seguintes:

(12) **A1.** Para todo inteiro a com $1 < a < p$, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

(12) **A2.** Para todo inteiro a, $a^p \equiv a \pmod{p}$.

(18) **A3.** Para todo inteiro a coprimo com m, $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

(18) **A4.** A função φ de Euler é multiplicativa.

(12) **A5.** Para todo $n \geq 3$, $\varphi(n)$ é par.

Demonstração de ______ .

Lemmata

(10) **B**

Lemma. Seja m inteiro positivo. Se $a^{m-1} \not\equiv 1 \pmod{m}$ para algum a coprimo com m, então para pelo menos a metade dos u com $1 < u < m$ também temos $u^{m-1} \not\equiv 1 \pmod{m}$.

Dica: *Basta achar, para cada u que passa o teste, um que não passa.*

Demonstração.

(8$^\flat$) **C**

Resolva o sistema de congruências, ou seja, responda na pergunta: quais inteiros x satisfazem as três congruências?

$$\begin{cases} 3x \equiv 19 \pmod{14} \\ x \equiv 2 \pmod{15} \\ 2x \equiv 3 \pmod{11} \end{cases}$$

Resposta.

Só isso mesmo.

Rascunho

Rascunho