
Nome:

18/10/2019

Regras:

- I. Não vires esta página antes do começo da prova.
- II. Nenhuma consulta de qualquer forma.
- III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).¹
- IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.
- V. $(\forall x) [\text{Colar}(x) \implies \neg \text{Passar}(x, \text{FMC1})]$.²
- VI. Use caneta para tuas respostas.
- VII. Responda dentro das caixas indicadas.
- VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.
- IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.
- X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.
- XI. Os pontos bônus podem ser usados para aumentar uma nota de qualquer unidade, dado que a nota original é pelo menos 5,0.³
- XII. Escolhe até 2 dos D, E, F, G.⁴

Lembram-se:

Definição. Dados $n, k \in \mathbb{N}$ denotamos por $C(n, k)$ a quantidade de maneiras que podemos escolher k objetos (sem repetições) de n objetos (distintos).

Definição. Sejam a, b inteiros. Um inteiro d é um *maior divisor comum* dos a, b sse d é um divisor comum dos a, b , divisível por todo divisor comum dos a, b .

$$d \text{ é um m.d.c dos } a, b \stackrel{\text{def}}{\iff} d \mid a \ \& \ d \mid b \ \& \ (\forall c) [c \mid a \ \& \ c \mid b \implies c \mid d].$$

Denotamos por $\text{gcd}(a, b)$ ou por (a, b) o maior divisor comum não negativo dos a, b .

Boas provas!

¹Ou seja, *desligue antes* da prova.

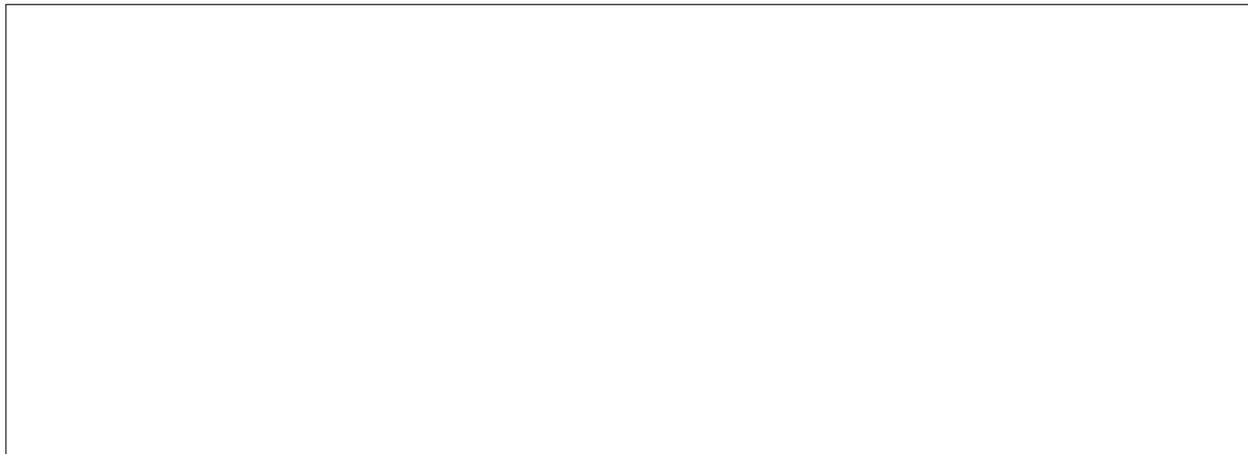
²Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

³Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

⁴Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(32) **D**

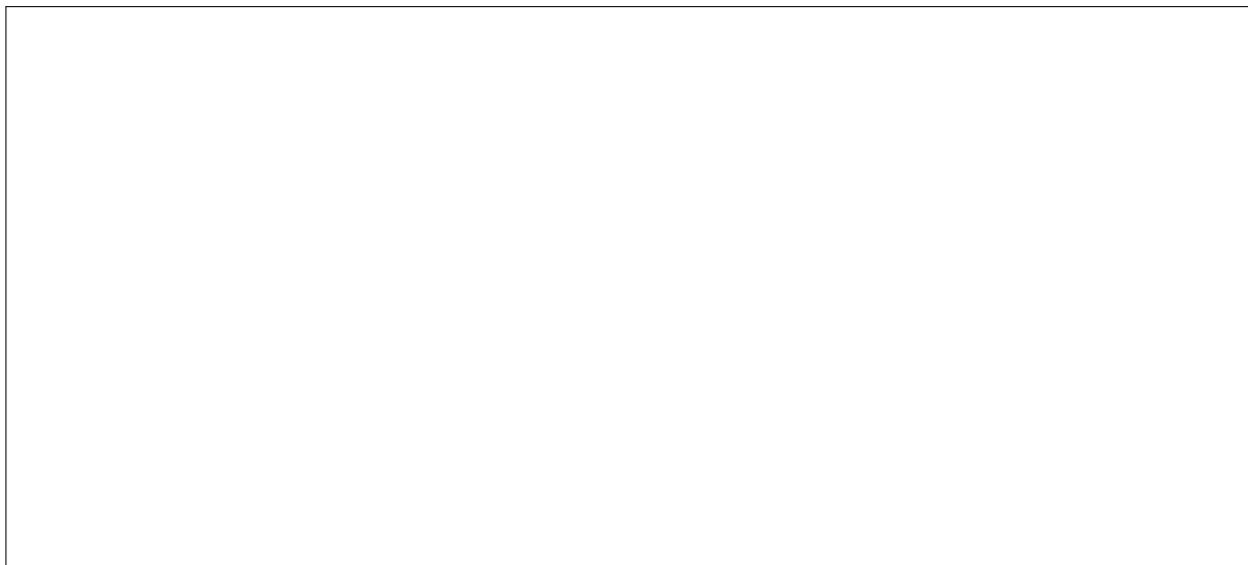
(16) **D1.** Deriva uma definição recursiva do $C(n, k)$ pelos princípios de contagem.
RESOLUÇÃO.



(16) **D2.** Demonstre formalmente:

para todo $n \geq 1$ e todo $0 < k \leq n$, $k \mid n!$.

Dica: Se usar «...» na tua demonstração "formal", melhor não escolher esse problema.
DEMONSTRAÇÃO.



(42) **E**

(24) **E1.** Demonstre que a quantidade de maneiras que podemos escolher j inteiros dos $1, \dots, n$ tais que não escolhamos nenhum par de inteiros consecutivos são $C(n - j + 1, j)$.

Dica: Seja e recurse (em outras palavras: nomeia e conquista).

DEMONSTRAÇÃO.

(18) **E2.** Escreva o 5 como combinação linear dos 29 e 18.

RESOLUÇÃO.

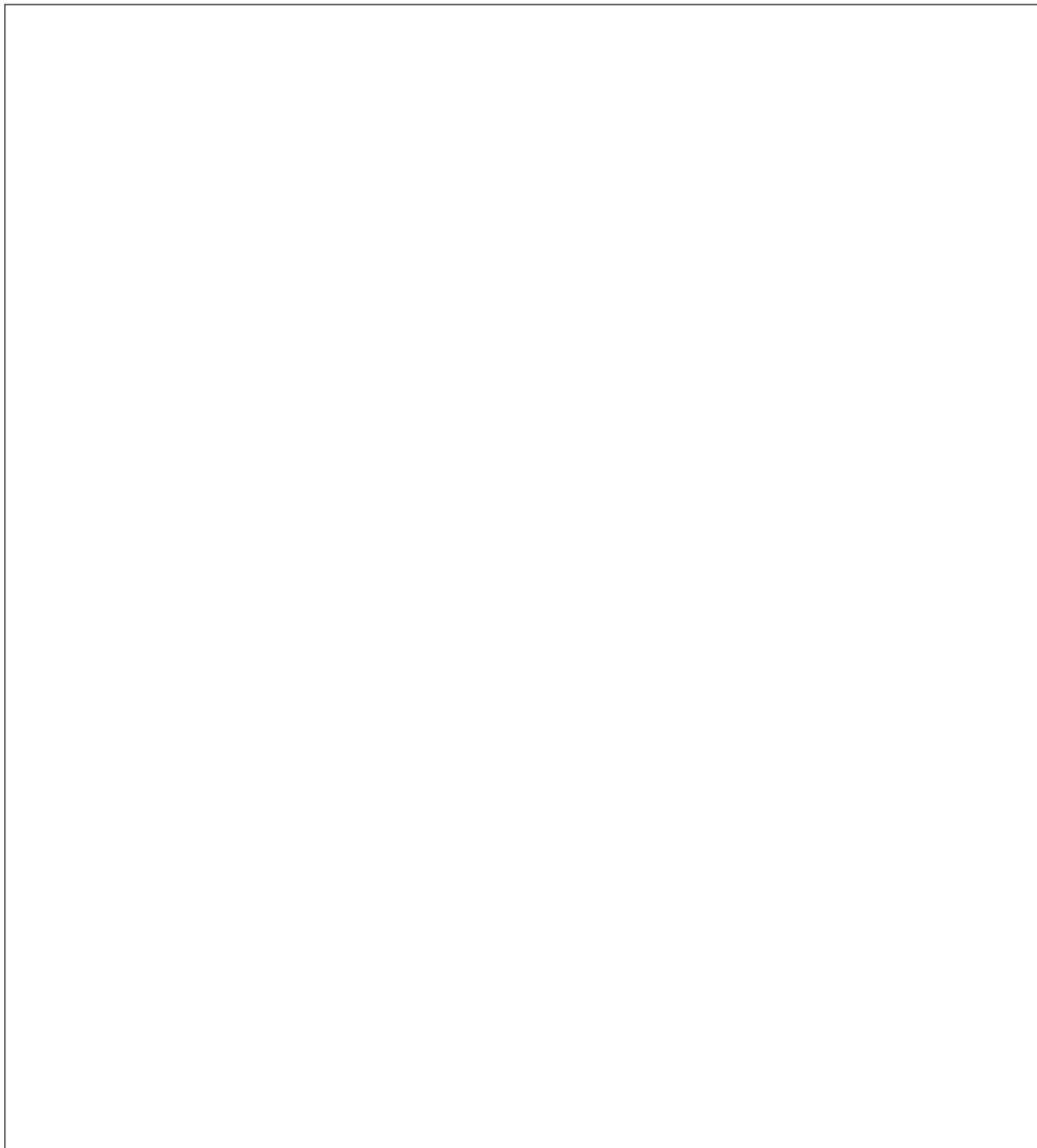
(42) **F**

Definimos a seqüência dos números Fibonacci pelas

$$F_0 = 0 \quad F_1 = 1 \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Demonstre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $(F_{n+1}, F_n) = 1$.

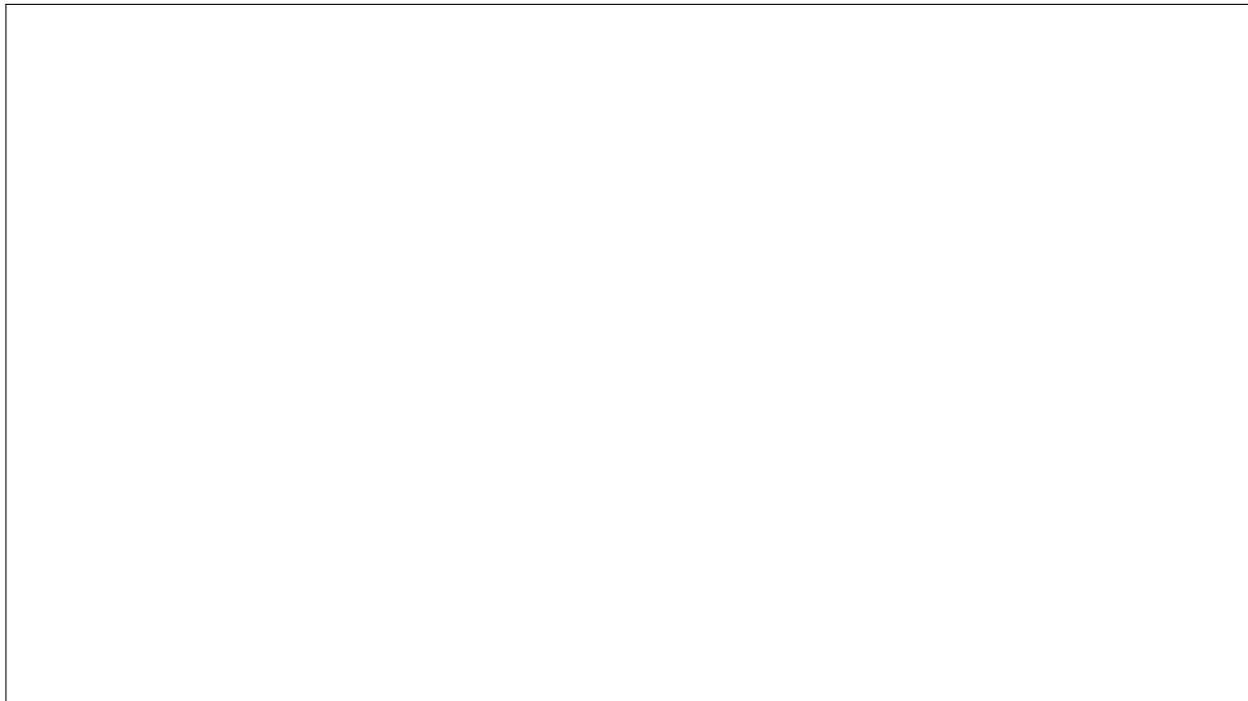
DEMONSTRAÇÃO.



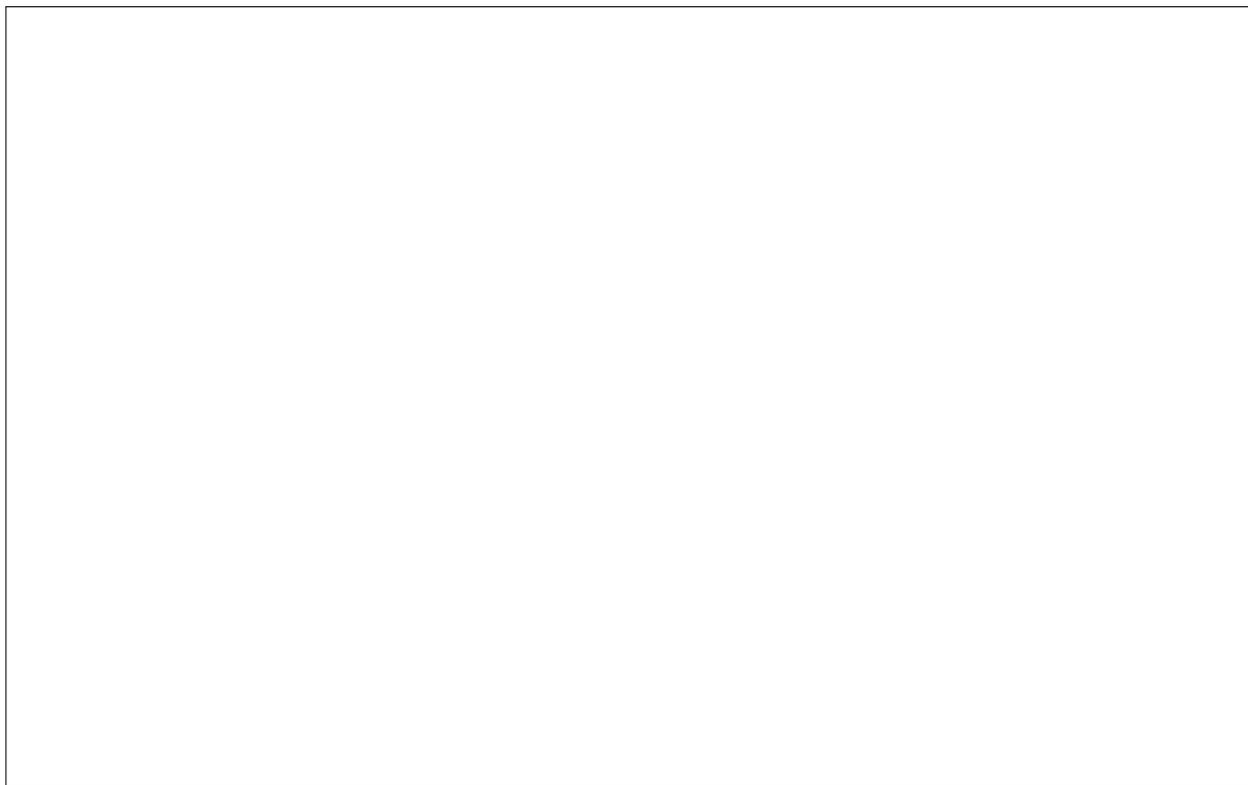
(42) **G**

Teorema. *Sejam $a, b, m \in \mathbb{Z}$ com $m > 0$. Os inteiros a e b divididos por m deixam o mesmo resto se e somente se $m \mid a - b$.*

(21) **G1.** DEMONSTRAÇÃO DA (\Rightarrow) .



(21) **G2.** DEMONSTRAÇÃO DA (\Leftarrow) .



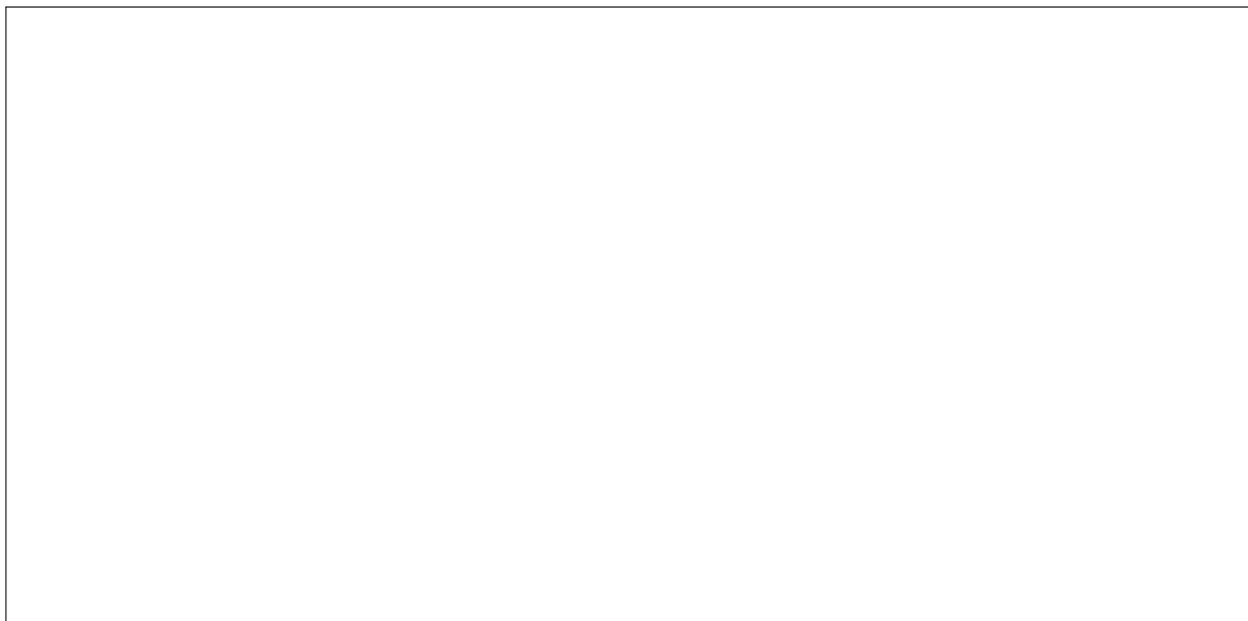
(16) **I**

Demonstre ou refute a proposição seguinte:

Proposição. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Se um inteiro $m \geq 0$ divide ámbos os a, b e pode ser escrito como combinação linear deles, então $m = (a, b)$.*

Dica: É fácil. Olha o tamanho da caixa da resposta!

DEMONSTRAÇÃO / REFUTAÇÃO.



(8^b) **J**

Denotamos o algoritmo de Euclides para achar o (a, b) por $\text{EUCLID}(a, b)$.

Teorema. Para todo $n \geq 1$ e quaisquer inteiros $a > b > 0$, se $\text{EUCLID}(a, b)$ precisa n passos (divisões) para terminar, então $a \geq F_{n+2}$ e $b \geq F_{n+1}$.

Dica: (1) Calma; (2) Respira; (3) Rasca; (4) Induza; (5) $x < y \iff \text{quot}(x, y) \geq 1$.
DEMONSTRAÇÃO.



Só isso mesmo.

RASCUNHO

RASCUNHO