FMC1, 2019.2
(Turma N12 do Thanos)

Prova 2.1
(points: 100; bonus: $8^\flat$; time: 90')

Nome:

18/10/2019

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC1})\,]$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la.*

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

XI. Os pontos bônus podem ser usados para aumentar uma nota de qualquer unidade, dado que a nota original é pelo menos 5,0.[3]

XII. **Escolhe até 2 dos $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$.**[4]

Lembram-se:

Definição. Dados $n, k \in \mathbb{N}$ denotamos por $C(n, k)$ a quantidade de maneiras que podemos escolher k objetos (sem repetições) de n objetos (distintos).

Definição. Sejam a, b inteiros. Um inteiro d é um *maior divisor comum* dos a, b sse d é um divisor comum dos a, b, divisível por todo divisor comum dos a, b.

$$d \text{ é um m.d.c dos } a, b \overset{\text{def}}{\iff} d \mid a \;\&\; d \mid b \;\&\; (\forall c)\,[\,c \mid a \;\&\; c \mid b \implies c \mid d\,]\,.$$

Denotamos por $\gcd(a, b)$ ou por (a, b) o maior divisor comum não negativo dos a, b.

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

[4] Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(32) **D**

(16) **D1.** Deriva uma definição recursiva do $C(n, k)$ pelos princípios de contagem.
RESOLUÇÃO.

(16) **D2.** Demonstre formalmente:

$$\textit{para todo } n \geq 1 \textit{ e todo } 0 < k \leq n,\ k \mid n!.$$

Dica: *Se usar «. . .» na tua demonstração "formal", melhor não escolher esse problema.*
DEMONSTRAÇÃO.

(42) **E**

(24) **E1.** Demonstre que a quantidade de maneiras que podemos escolher j inteiros dos $1, \ldots, n$ tais que não escolhemos nenhum par de inteiros consecutivos são $C(n-j+1, j)$.

Dica: *Seje e recurse (em outras palavras: nomeia e conquiste).*

Demonstração.

(18) **E2.** Escreva o 5 como combinação linear dos 29 e 18.

Resolução.

(42) **F**

Definimos a seqüência dos números Fibonacci pelas

$$F_0 = 0 \qquad F_1 = 1 \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Demonstre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $(F_{n+1}, F_n) = 1$.
Demonstração.

(42) **G**

Teorema. *Sejam $a, b, m \in \mathbb{Z}$ com $m > 0$. Os inteiros a e b divididos por m deixam o mesmo resto se e somente se $m \mid a - b$.*

(21) **G1.** DEMONSTRAÇÃO DA ($\Rightarrow$).

(21) **G2.** DEMONSTRAÇÃO DA ($\Leftarrow$).

(16) **I**

Demonstre ou refute a proposição seguinte:

Proposição. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Se um inteiro $m \geq 0$ divide ámbos os a, b e pode ser escrito como combinação linear deles, então $m = (a, b)$.*

Dica: *É fácil. Olha o tamanho da caixa da resposta!*

Demonstração / Refutação.

$(8^\flat)$ **J**

Denotamos o algoritmo de Euclides para achar o (a, b) por $\textsc{Euclid}(a, b)$.

Teorema. *Para todo $n \geq 1$ e quaisquer inteiros $a > b > 0$, se $\textsc{Euclid}(a, b)$ precisa n passos (divisões) para terminar, então $a \geq F_{n+2}$ e $b \geq F_{n+1}$.*

Dica: *(1) Calma; (2) Respira; (3) Rascunhe; (4) Induza; (5)* $x > y \implies \mathrm{quot}(x, y) \geq 1$.

DEMONSTRAÇÃO.

Só isso mesmo.

Rascunho

Rascunho