FMC1, 2019.2
(Turma N12 do Thanos)

Prova 1.1
(points: 100; bonus: $0^\flat$; time: 90')

Nome:

06/09/2019

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\text{Colar}(x) \implies \neg\text{Passar}(x, \text{FMC1})\,]$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

XII. **Escolhe até 2 dos $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}$.**[4]

Lembram-se:

(a1)	$n + 0 = n$	(m1)	$n \cdot 0 = 0$
(a2)	$n + Sm = S(n + m)$	(m2)	$n \cdot Sm = n + (n \cdot m)$

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.
[4] Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(24) **A**

(4) **A1.** Escreva uma definição *completa e formal* da relação de «divide».
DEFINIÇÃO:

(20) **A2.** Usando apenas a definição de «divide» demonstre ou refute a proposição seguinte:

para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$, *se* $a \mid b$ *e* $b \mid c$ *então* $a \mid c + ab$.

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO.

(36) # B

(4) **B1.** Defina formalmente a exponenciação nos Nats.
DEFINIÇÃO.

(32) **B2.** Dado a associatividade e comutatividade das $+$ e $\cdot$ demonstre que

$$\text{para quaisquer } a, x, y \in \mathbb{N}, \text{ temos } a^{xy} = (a^x)^y.$$

Se citar lemmata, deves enunciá-los e demonstrá-los no espaço indicado.
DEMONSTRAÇÃO.

LEMMATA.

(36) **C**

Nos naturais definimos as funções seguintes recursivamente:

$$F_0 = 0 \qquad\qquad L_0 = 2$$
$$F_1 = 1 \qquad\qquad L_1 = 1$$
$$(\ldots 1 \ldots) \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad\qquad (\ldots 2 \ldots) \quad L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

(4) **C1.** O que fica implícito nos "$\ldots 1 \ldots$" e "$\ldots 2 \ldots$"?

$(\ldots 1 \ldots)$: $\boxed{}$ $(\ldots 2 \ldots)$: $\boxed{}$

(8) **C2.** Para qualquer n natural, defina formalmente o *somatório* $t_1 + t_2 + \cdots + t_n$ dos n primeiros termos duma seqüência de termos $t_1, t_2, t_3, \ldots$.

Definição.

(24) **C3.** Já demonstramos (e podes usar) que

$$\text{para todo } n \geq 1,\ L_n = F_{n-1} + F_{n+1}. \tag{*}$$

Agora demonstre que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$L_1 + 2L_2 + 4L_3 + \cdots + 2^{n-1}L_n = 2^n F_{n+1} - 1.$$

Demonstração.

(36) **D**

Definimos a função binária $A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ recursivamente assim:

$$A(0,x) = x + 1 \tag{ack1}$$
$$A(n+1,0) = A(n,1) \tag{ack2}$$
$$A(n+1,x+1) = A(n, A(n+1,x)) \tag{ack3}$$

Usamos também a notação $A_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} A(n,x)$. A notação ajuda quando queremos fixar um primeiro argumento $u \in \mathbb{N}$ na A, escrevendo assim A_u para a função unária definida pela

$$A_u(x) = A(u,x).$$

Descobrimos que seguindo fielmente a definição da A não é uma idéia eficiente para calcular seus valores. Fixando o primeiro argumento temos as «fórmulas fechadas» que facilitam calcular valores das primeiras *secções* da A:

(f1) $\quad (\forall x)\,[\,A_1(x) = x + 2\,]$ $\qquad\qquad$ $(\forall x)\,[\,A_2(x) = 2x + 3\,]$ $\quad$ (f2)

(12) **D1.** Demonstre a (f1).
Demonstração.

(12) **D2.** Demonstre a (f2).
Demonstração.

DEMONSTRAÇÃO (CONT.).

(12) **D3.** Adivinhe uma fórmula fechada para o A_3, e demonstre sua corretude.
Dica: *Para adivinhar a fórmula, calcule os primeiros valores da A_3 até descobrir um "padrão".*

PALPITE: $A_3(x) =$ ________________

DEMONSTRAÇÃO.

(36) **E**

Ainda sobre a função A do **D** *(cujos resultados podes usar aqui).*

(36) Demonstre que para todo n e todo x, $A_n(x) \geq 1$.
Demonstração.

(64) **F**

Ainda sobre a função A dos **D**–**E** *(cujos resultados podes usar aqui).*

Definição. Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é *estritamente crescente* sse

$$\textit{para quaisquer } x, y, \quad x < y \implies f(x) < f(y).$$

Lemma. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que para todo t, $f(t) < f(t+1)$. Logo f é *estritamente crescente.*

(64) Dado o Lemma, demonstre o
Teorema. Para todo n, A_n é estritamente crescente.
DEMONSTRAÇÃO.

Demonstração (cont.).

Só isso mesmo.

Rascunho

Rascunho

Rascunho