FMC1, 2019.2
(Turma N12 do Thanos)

Prova 1.1
(points: 100; bonus: $0^\flat$; time: 90')

Nome: Θάνος **Gabarito**

06/09/2019

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC1})\,]$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

XII. **Escolhe até 2 dos A, B, C, D, E, F.**[4]

Lembram-se:

$$
\begin{aligned}
&\text{(a1)} \quad n + 0 = n &\qquad& \text{(m1)} \quad n \cdot 0 = 0 \\
&\text{(a2)} \quad n + Sm = S(n + m) &\qquad& \text{(m2)} \quad n \cdot Sm = n + (n \cdot m)
\end{aligned}
$$

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.
[4] Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(24) **A**

(4) **A1.** Escreva uma definição *completa e formal* da relação de «divide».
DEFINIÇÃO:

Sejam a, b inteiros. O a *divide* o b sse $ak = b$ para algum inteiro k.

(20) **A2.** Usando apenas a definição de «divide» demonstre ou refute a proposição seguinte:

$$\textit{para todo } a, b, c \in \mathbb{Z}, \textit{ se } a \mid b \textit{ e } b \mid c \textit{ então } a \mid c + ab.$$

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO.

Vou demonstrar a proposição.

Sejam a, b, c inteiros tais que $a \mid b$ e $b \mid c$. Logo sejam u, v inteiros tais que $au = b$ e $bv = c$. Calculamos:

$$\begin{aligned} c + ab &= bv + ab && \text{(pela escolha do } v\text{)} \\ &= auv + aau && \text{(pela escolha do } u\text{)} \\ &= a(uv + au). \end{aligned}$$

Como $uv + au$ é inteiro, logo $a \mid c + ab$.

(36) **B**

(4) **B1.** Defina formalmente a exponenciação nos Nats.
DEFINIÇÃO.

$$n^0 = S0 \qquad \text{(e1)}$$
$$n^{Sm} = n \cdot (n^m) \qquad \text{(e2)}$$

(32) **B2.** Dado a associatividade e comutatividade das + e · demonstre que

$$\text{para quaisquer } a, x, y \in \mathbb{N}, \text{ temos } a^{xy} = (a^x)^y.$$

Se citar lemmata, deves enunciá-los e demonstrá-los no espaço indicado.
DEMONSTRAÇÃO.

Sejam a, x inteiros. Vou demonstrar que

$$(\forall y)\,[\, a^{xy} = (a^x)^y \,]\,.$$

Por indução no y.
BASE: $a^{x0} \stackrel{?}{=} (a^x)^0$.
Calculamos:

$$\begin{aligned}
a^{x0} &= a^0 && \text{(pela (m1) com } n := 0\text{)} \\
&= S0 && \text{(pela (e1) com } n := 0\text{)} \\
(a^x)^0 &= S0 && \text{(pela (e1) com } n := a^x\text{)}
\end{aligned}$$

PASSO INDUTIVO. Seja k tal que

$$a^{xk} = (a^x)^k. \qquad \text{(H.I.)}$$

Basta demonstrar que $a^{x \cdot Sk} = (a^x)^{Sk}$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
(a^x)^{Sk} &= a^x \cdot (a^x)^k && \text{((e2), } n := a^x,\ m := k\text{)} \\
&= (a^x)^k \cdot a^x && \text{(comutatividade da } \cdot\text{)} \\
&= a^{x \cdot k} \cdot a^x && \text{((H.I.))} \\
&= a^{(x \cdot k)+x} && \text{((Lemma 1), } x := a,\ a := xk,\ x := x\text{)} \\
&= a^{x+(x \cdot k)} && \text{(comutatividade da +)} \\
&= a^{x \cdot Sk}. && \text{((m2), } n := x,\ m := k\text{)}
\end{aligned}$$

Lemma 1. Para quaisquer x, a, b, $x^{a+b} = x^a \cdot x^b$.
DEMONSTRAÇÃO. Sejam $x, a \in \mathbb{N}$. Vou demonstrar por indução que

$$(\forall b)\left[\, x^{a+b} = x^a \cdot x^b \,\right].$$

BASE: $x^{a+0} \stackrel{?}{=} x^a \cdot x^0$.
Calculamos:

$$\begin{aligned}
x^{a+0} &= x^a && \text{((a1))} \\
&= x^a \cdot S0 && \text{(Lemma 2)} \\
&= x^a \cdot x^0. && \text{((e1))}
\end{aligned}$$

PASSO INDUTIVO. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$x^{a+k} = x^a \cdot x^k. \tag{H.I.}$$

Basta provar que $x^{a+Sk} = x^a \cdot x^{Sk}$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
x^{a+Sk} &= x^{S(a+k)} && \text{((a2))} \\
&= x \cdot x^{a+k} && \text{((e2))} \\
&= x \cdot (x^a \cdot x^k) && \text{((H.I.))} \\
&= (x \cdot x^a) \cdot x^k && (\text{assoc. da } \cdot) \\
&= (x^a \cdot x) \cdot x^k && (\text{comut. da } \cdot) \\
&= x^a \cdot (x \cdot x^k) && (\text{assoc. da } \cdot) \\
&= x^a \cdot x^{Sk}. && \text{((e2))}
\end{aligned}$$

Lemma 2. Para todo x, $x \cdot S0 = x$.
DEMONSTRAÇÃO. Seja $x \in \mathbb{N}$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
x \cdot S0 &= x + (x \cdot 0) && (\text{(m2)}, n := x, m := 0) \\
&= x + 0 && (\text{(m1)}, n := x) \\
&= x. && (\text{(a1)}, n := x)
\end{aligned}$$

(36) **C**

Nos naturais definimos as funções seguintes recursivamente:

$$\begin{aligned} &F_0 = 0 & &L_0 = 2 \\ &F_1 = 1 & &L_1 = 1 \\ (\ldots 1 \ldots)\quad &F_n = F_{n-1} + F_{n-2} & (\ldots 2 \ldots)\quad &L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \end{aligned}$$

(4) **C1.** O que fica implícito nos "$\ldots 1 \ldots$" e "$\ldots 2 \ldots$"?

$(\ldots 1 \ldots)$: para todo $n \geq 2$ $(\ldots 2 \ldots)$: para todo $n \geq 2$

(8) **C2.** Para qualquer n natural, defina formalmente o *somatório* $t_1 + t_2 + \cdots + t_n$ dos n primeiros termos duma seqüência de termos $t_1, t_2, t_3, \ldots$.

Definição.

$$\sum_{i=1}^{0} t_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{Sn} t_i = \sum_{i=1}^{n} t_i + t_{Sn}$$

(24) **C3.** Já demonstramos (e podes usar) que

$$\text{para todo } n \geq 1,\ L_n = F_{n-1} + F_{n+1}. \tag{*}$$

Agora demonstre que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$L_1 + 2L_2 + 4L_3 + \cdots + 2^{n-1}L_n = 2^n F_{n+1} - 1.$$

Demonstração.

Por indução. Base. O lado esquerdo pela definição de somatório vazio é 0. Basta verificar que o lado direito também é. Calculamos: $2^0 F_{0+1} - 1 = 1F_1 - 1 = 1 - 1 = 0$.

Passo Indutivo. Seja $k \geq 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} L_i = 2^k F_{k+1} - 1. \tag{H.I.}$$

Basta demonstrar que $\sum_{i=1}^{k+1} 2^{i-1} L_i = 2^{k+1} F_{k+2} - 1$. Calculamos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} 2^{i-1} L_i &= \left(\sum\nolimits_{i=1}^{k} 2^{i-1} L_i \right) + 2^{(k+1)-1} L_{k+1} & &\text{(def. somatório)} \\ &= \left(2^k F_{k+1} - 1 \right) + 2^k L_{k+1} & &\text{(H.I.)} \\ &= 2^k \left(F_{k+1} + L_{k+1} \right) - 1 & & \\ &= 2^k \left(F_{k+1} + F_k + F_{k+2} \right) - 1 & &\text{((*) com } n := k+1) \\ &= 2^k \left(F_{k+2} + F_{k+2} \right) - 1 & &\text{(def. } F) \\ &= 2^k 2 F_{k+2} - 1 & & \\ &= 2^{k+1} F_{k+2} - 1. & & \end{aligned}$$

(36) **D**

Definimos a função binária $A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ recursivamente assim:

$$A(0, x) = x + 1 \tag{ack1}$$
$$A(n+1, 0) = A(n, 1) \tag{ack2}$$
$$A(n+1, x+1) = A(n, A(n+1, x)) \tag{ack3}$$

Usamos também a notação $A_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} A(n, x)$. A notação ajuda quando queremos fixar um primeiro argumento $u \in \mathbb{N}$ na A, escrevendo assim A_u para a função unária definida pela

$$A_u(x) = A(u, x).$$

Descobrimos que seguindo fielmente a definição da A não é uma idéia eficiente para calcular seus valores. Fixando o primeiro argumento temos as «fórmulas fechadas» que facilitam calcular valores das primeiras *secções* da A:

$$\text{(f1)} \qquad (\forall x)\,[\,A_1(x) = x + 2\,] \qquad\qquad (\forall x)\,[\,A_2(x) = 2x + 3\,] \qquad \text{(f2)}$$

(12) **D1.** Demonstre a (f1).
Demonstração.

Por indução.
Base. Calculamos $A_1(0) = A_0(1) = 1 + 1 = 2 = 0 + 2$.
Passo indutivo. Seja k tal que $A_1(k) = k + 2$ $^{\text{(H.I.)}}$. Calculamos:

$$\begin{aligned} A_1(k+1) &= A_0(A_1(k)) && \text{(def. } A_1\text{)} \\ &= A_1(k) + 1 && \text{(def. } A_0\text{)} \\ &= k + 2 + 1 && \text{(H.I.)} \\ &= (k+1) + 2. \end{aligned}$$

(12) **D2.** Demonstre a (f2).
Demonstração.

Por indução.
Base.
Calculamos $A_2(0) = A_1(1) = 1 + 2 = 3 = 2 \cdot 0 + 3$.

Demonstração (cont.).

Passo indutivo.
Seja k tal que $A_2(k) = 2k + 3$ (H.I.). Calculamos:

$$\begin{aligned}
A_2(k+1) &= A_1(A_2(k)) && \text{(def. } A_2\text{)}\\
&= A_2(k) + 2 && \text{((f1) com } x := A_2(k)\text{)}\\
&= 2k + 3 + 2 && \text{(H.I.)}\\
&= 2(k+1) + 3.
\end{aligned}$$

(12) **D3.** Adivinhe uma fórmula fechada para o A_3, e demonstre sua corretude.
Dica: *Para adivinhar a fórmula, calcule os primeiros valores da A_3 até descobrir um "padrão".*

Palpite: $A_3(x) =$ $2^{x+3} - 3$
Demonstração.

Vou demonstrar por indução que

$$(\forall x)\left[\, A_3(x) = 2^{x+3} - 3 \,\right].$$

Base. Calculamos:

$$\begin{aligned}
A_3(0) &= A_2(1) && \text{(def. } A_3\text{)}\\
&= 2 \cdot 1 + 3 && \text{((f2) com } x := 1\text{)}\\
&= 5\\
&= 2^3 - 3.
\end{aligned}$$

Passo indutivo.
Seja k tal que $A_3(k) = 2^{k+3} - 3$ (H.I.). Calculamos:

$$\begin{aligned}
A_3(k+1) &= A_2(A_3(k)) && \text{(def. } A_3\text{)}\\
&= 2A_3(k) + 3 && \text{((f2) com } x := A_3(k)\text{)}\\
&= 2\left(2^{k+3} - 3\right) + 3 && \text{(H.I.)}\\
&= 2^{1+k+3} - 6 + 3\\
&= 2^{(k+1)+3} - 3.
\end{aligned}$$

(36) **E**

Ainda sobre a função A do **D** *(cujos resultados podes usar aqui).*

(36) Demonstre que para todo n e todo x, $A_n(x) \geq 1$.
DEMONSTRAÇÃO.

Por indução no n.
BASE: $(\forall x)\,[\,A_0(x) \geq 1\,]$
Seja $x \in \mathbb{N}$. Calculamos $A_0(x) = x + 1 \geq 1$.
PASSO INDUTIVO. Seja k tal que «todos os valores da A_k são positivos»:

$$(\forall y)\,[\,A_k(y) \geq 1\,] \tag{H.I.}$$

Basta mostrar que todos os valores da A_{k+1} são positivos também. Seja $t \in \mathbb{N}$.

CASO $t = 0$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
A_{k+1}(t) &= A_{k+1}(0) && \text{(hipótese do caso)}\\
&= A_k(1) && \text{(def. } A_{k+1}\text{)}\\
&\geq 1 && \text{((H.I.) com } y := 1\text{)}
\end{aligned}$$

CASO $t > 0$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
A_{k+1}(t) &= A_k(A_{k+1}(t-1)) && \text{(hipótese do caso e def. } A_{k+1}\text{)}\\
&\geq 1 && \text{((H.I.) com } y := A_{k+1}(t-1)\text{)}
\end{aligned}$$

(64) **F**

Ainda sobre a função A dos **D**–**E** *(cujos resultados podes usar aqui).*

Definição. Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é *estritamente crescente* sse

$$\textit{para quaisquer } x, y, \quad x < y \implies f(x) < f(y).$$

Lemma. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que para todo t, $f(t) < f(t+1)$. Logo f é *estritamente crescente.*

(64) Dado o Lemma, demonstre o
Teorema. Para todo n, A_n é estritamente crescente.
Demonstração.

Por indução no n.
Base: A_0 é estritamente crescente.
Graças ao Lemma, basta demonstrar que

$$(\forall t)\,[\,A_0(t) < A_0(t+1)\,]\,.$$

Seja $t \in \mathbb{N}$. Calculamos: $A_0(t) = t + 1 < t + 2 = A_0(t+1)$
Passo indutivo. Seja w tal que A_w é estritamente crescente, ou seja, tal que

$$(\forall u)\,(\forall v)\,[\,u < v \implies A_w(u) < A_w(v)\,] \qquad \text{(HI)}$$

Basta demonstrar que A_{w+1} também é, e graças ao Lemma basta demonstrar que

$$(\forall t)\,[\,A_{w+1}(t) < A_{w+1}(t+1)\,]\,.$$

Por indução no t.
Subbase: $A_{w+1}(0) < A_{w+1}(1)$.
Calculamos o lado esquerdo:

$$A_{w+1}(0) = A_w(1). \qquad \text{(def. } A_{w+1})$$

E lado direito:

$$A_{w+1}(1) = A_w(A_{w+1}(0)) \qquad \text{(def. } A_{w+1})$$

Como A_w é estritamente crescente, basta verificar que

$$1 < A_{w+1}(0)$$

que é verdade pois

$$\begin{aligned} A_{w+1}(0) &= A_w(1) && \text{(def. } A_{w+1}) \\ &> A_w(0) && \text{((HI) com } u := 0,\ v := 1) \\ &\geq 1. && (\mathbf{D}\text{, com } n := w,\ x := 0) \end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO (CONT.).

SUBPASSO INDUTIVO. Seja k tal que

$$A_{w+1}(k) < A_{w+1}(k+1). \tag{SHI}$$

Basta demonstrar que

$$A_{w+1}(k+1) < A_{w+1}(k+2).$$

Calculamos o lado esquerdo:

$$A_{w+1}(k+1) = A_w(A_{w+1}(k)). \qquad \text{(def. } A_{w+1}\text{)}$$

E o lado direito:

$$A_{w+1}(k+2) = A_w(A_{w+1}(k+1)) \qquad \text{(def. } A_{w+1}\text{)}$$

Graças à (HI) com $u := A_{w+1}(k)$ e $v := A_{w+1}(k+1)$ basta verificar que

$$A_{w+1}(k) < A_{w+1}(k+1).$$

E isso é exatamente a nossa (SHI).

Só isso mesmo.