

---

Nome:

---

09/12/2016

### Regras:

- I. Não vires esta página antes do começo da prova.
- II. Nenhuma consulta de qualquer forma.
- III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).<sup>1</sup>
- IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.
- V.  $\forall x [\text{Colar}(x) \rightarrow \neg \text{Passar}(x, \text{FMC1})]$ .<sup>2</sup>
- VI. Use caneta para tuas respostas.
- VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho antes de usá-la.
- VIII. Entregue *todas* as folhas de rascunho juntas com tua prova.
- IX. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.
- X. Os pontos bônus duma unidade são considerados apenas para quem consiga passar sem.<sup>3</sup>

### Esclarecimentos:

1. Podes deixar fatoriais ( $n!$ ), permutações ( $P(n, r)$ ) e combinações ( $C(n, r)$ ) nos teus cálculos.
2. Nas “respostas” *não* precisa explicar teu raciocínio, mas *não escreva apenas um valor final*; Exemplo:  $9!C(9, 5)$  é aceitavel como resposta, mas seu valor 45722880 sem explicação, não!
3. Nas “resoluções” explique *curtamente* a ideia da tua resolução.

*Boas contas!*

---

<sup>1</sup>Ou seja, *desligue antes* da prova.

<sup>2</sup>Se essa regra não faz sentido, melhor já desistir.

<sup>3</sup>Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota final de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

(10 + 8<sup>b</sup>) **A**

**Definição 0. (Informal)**

Sejam  $n, r \in \mathbb{N}$  com  $r \leq n$ . Usamos  $C(n, r)$  para denotar o número de maneiras de escolher sem repetições  $r$  objetos numa colecção de  $n$  objetos distintos.

**Definição 1. (Formal, não-recursiva)**

Sejam  $n, r \in \mathbb{N}$  com  $r \leq n$ . Definimos

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

Prove que [REDACTED]

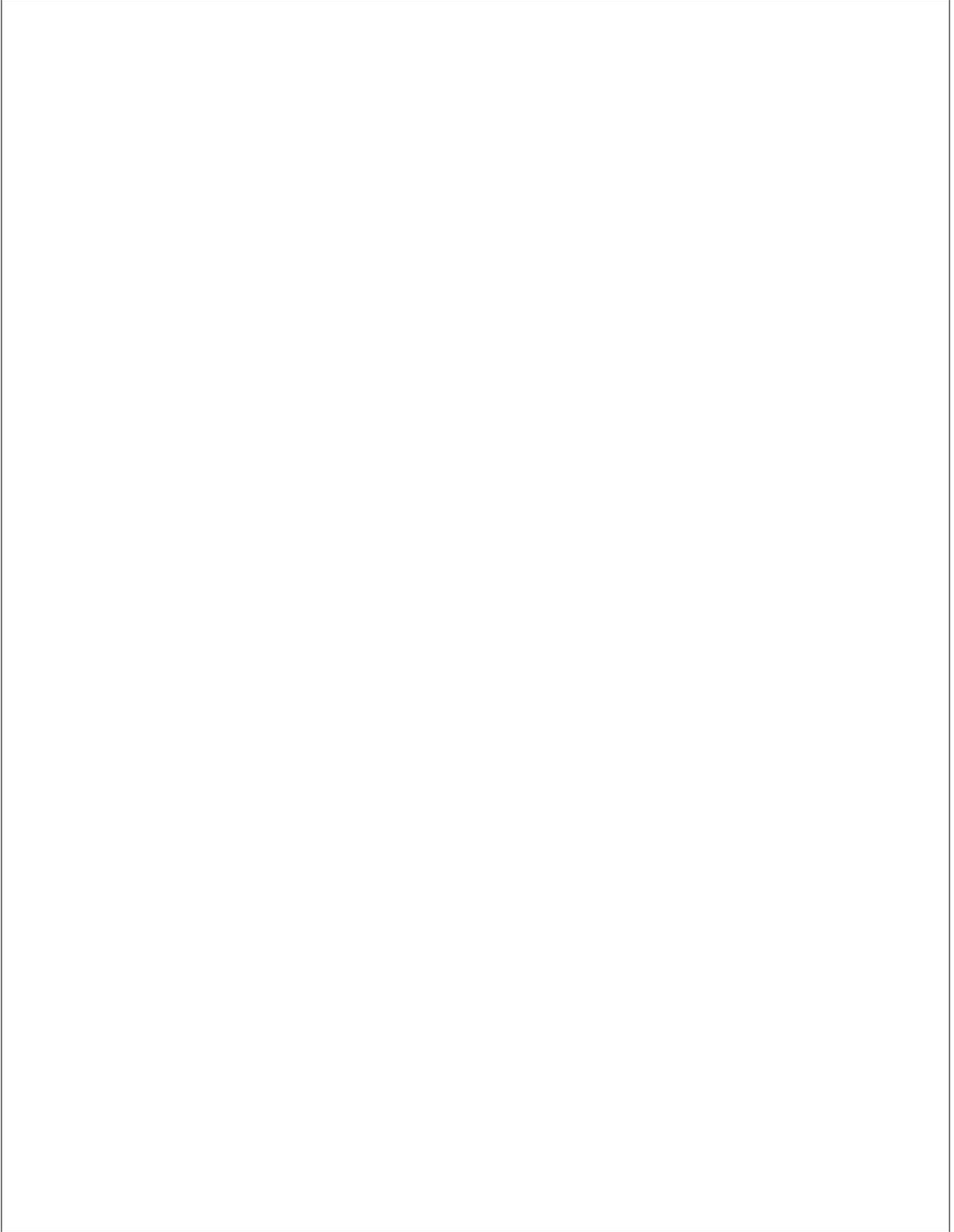
[REDACTED].

(10) **A1.** ... usando [REDACTED].

PROVA.

(8<sup>b</sup>) **A2.** ... usando ██████████

PROVA.



(10) **B**

Num jogo [redacted]:

[redacted]

[redacted] do jogo, escolhem [redacted] deles (sem repetições). Esses [redacted] são [redacted]. Um jogador [redacted] na sua [redacted] e se conseguir [redacted], ganha.

( [redacted] mais que [redacted], as chances do jogador aumentam, [redacted] [redacted].)

(3) **B1.** Um jogador [redacted]. Qual a probabilidade que ele ganhe?

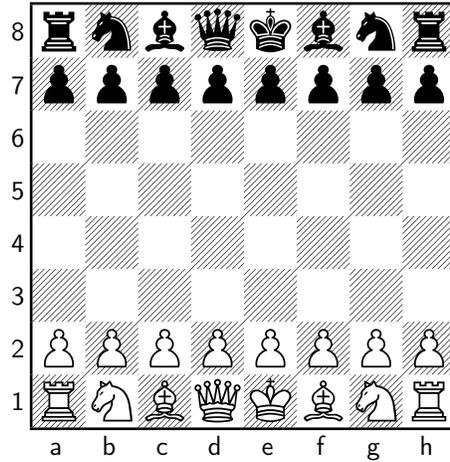
RESPOSTA.

(7) **B2.** Uma jogadora [redacted]. Qual a probabilidade que ela ganhe?

RESPOSTA.

(10) C

No xadrez, as regras mandam que as posições iniciais do jogo são as seguintes:



Um [redacted] na segunda [redacted] [redacted] as peças brancas nas suas posições iniciais. [redacted] apenas:

(i) [redacted] os peões brancos [redacted].

(6) C1. [redacted] sua ignorância, [redacted] na primeira linha [redacted].

Qual a probabilidade [redacted]?

RESOLUÇÃO.

(4) C2. Se o [redacted] uma regra:

(ii) a rainha branca (♔) [redacted];

qual seria a probabilidade [redacted]?

RESPOSTA.

(16) **D**

Considere os inteiros  $1, 2, \dots, 30$ .

(1) **D0.** De quantas maneiras podemos [REDACTED]?

RESPOSTA:

(15) **D1.** Quantas [REDACTED] têm a propriedade que [REDACTED] estão [REDACTED]?

RESOLUÇÃO.

(24) **E**

De quantas maneiras podemos escrever um string usando letras do alfabeto ████████, tais que ████████████████████ *mas* ████████████████████?

Por exemplo:

████████ é um string aceitável;

████████ não é.

*Dica: Inclusão-Exclusão.*

RESOLUÇÃO.

(18) **F**

Temos 6 [redacted], onde cada um [redacted]:

Alex: [redacted] Daniel: [redacted]

Bill: [redacted] Eduardo: [redacted]

Claudia: [redacted] Fagner: [redacted]

(Considere que [redacted], [redacted]  
[redacted], e que [redacted] é diferenciada [redacted]  
[redacted]. Por exemplo: [redacted] Alex [redacted] Bill [redacted], é  
diferente [redacted] Alex [redacted] Bill [redacted], mesmo que seus  
membros podem ser os mesmos.

*Dica: Tradução.*

(6) **F1.** Quantas [redacted] podemos formar?

RESOLUÇÃO.

(6) **F2.** Quantas [redacted] podemos formar com a restrição que nenhum [redacted] [redacted]  
mais que um [redacted] (mesmo se em geral [redacted])?

RESOLUÇÃO.

(6) **F3.** Quantas [redacted] podemos formar onde todos os [redacted]?

RESOLUÇÃO.

(24) G

De quantas maneiras podemos escrever um string  $s$  (usando o alfabeto  $\Sigma$ ) de tamanho  $n$ , tais que  $s$  seja palíndromo.

Por exemplo:

$aba$  é um string aceitavel;

$abca$  não é.

*Dica: Recursão.*

RESOLUÇÃO.

(16) **H**

Conta todas as palavras [REDACTED]

[REDACTED]

onde...

(3) **H0.** A palavra [REDACTED].

RESPOSTA.

(3) **H1.** Todos os [REDACTED].

RESPOSTA.

(5) **H2.** Todos os [REDACTED].

RESPOSTA.

(5) **H3.** Nenhum dos [REDACTED].

RESPOSTA.