FMC1, 2016.2
(Turmas do Thanos)

Prova 3
(points: 128/100; bonus: $8^\flat$; time: 100')

Nome: Θάνος **Gabarito**

09/12/2016

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\,[\text{Colar}(x) \rightarrow \neg\text{Passar}(x, \text{FMC1})]$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho antes de usá-la.

VIII. Entregue *todas* as folhas de rascunho juntas com tua prova.

IX. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

X. Os pontos bônus duma unidade são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

Esclarecimentos:

1. Podes deixar fatoriais ($n!$), permutações ($P(n, r)$) e combinações ($C(n, r)$) nos teus cálculos.

2. Nas "respostas" *não* precisa explicar teu raciocínio, mas *não escreva apenas um valor final*; Exemplo: $9!C(9, 5)$ é aceitavel como resposta, mas seu valor 45722880 sem explicação, não!

3. Nas "resoluções" explique *curtamente* a ideia da tua resolução.

Boas contas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor já desistir.

[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota final de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

$(10 + 8^\flat)$ **A**

Definição 0. (Informal)
Sejam $n, r \in \mathbb{N}$ com $r \leq n$. Usamos $C(n, r)$ para denotar o número de maneiras de escolher sem repetições r objetos duma colecção de n objetos distíntos.

Definição 1. (Formal, não-recursiva)
Sejam $n, r \in \mathbb{N}$ com $r \leq n$. Definimos

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}\,.$$

Prove que para todos os inteiros positivos n, r com $r < n$,

$$C(n, r) = C(n-1, r) + C(n-1, r-1).$$

(10) **A1.** ... usando a Definição 0 e idéias e princípios de contagem.
PROVA.

Fixamos um objeto n_0 dos n. Queremos contar as maneiras de escolher r objetos duma colecção com n objetos distíntos. Separamos as escolhas em 2 grupos distintos:

(i) aquelas que não contêm o n_0;

(ii) aquelas que contêm o n_0.

Obviamente os grupos são distíntos e cada escolha pertence em exatamente um deles. Pelo princípio da adição então, basta contar as escolhas de cada grupo e as somar.

Para formar uma escolha do grupo (i), precisamos escolher r dos $n-1$ objetos (todos exceto do n_0), ou seja, temos $C(n-1, r)$ maneiras.

Para formar uma escolha do grupo (ii), como ela já precisa ter o n_0, precisamos escolher apenas $r-1$ objetos dos $n-1$, ou seja, temos $C(n-1, r-1)$ maneiras.

Concluindo:

$$\underbrace{C(n, r)}_{\text{todas as maneiras}} = \underbrace{C(n-1, r)}_{\text{aquelas que não têm o } n_0} + \underbrace{C(n-1, r-1)}_{\text{aquelas que têm o } n_0}.$$

(8$^\flat$) **A2.** …usando apenas a Definição 1.

PROVA.

Sejam $r, n \in \mathbb{N}$ com $0 < r < n$. Calculamos:

$$C(n,r) = C(n-1,r) + C(n-1,r-1)$$

$$\begin{aligned}
\iff\quad \frac{n!}{(n-r)!\,r!} &= \frac{(n-1)!}{(n-1-r)!\,r!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-(r-1))!\,(r-1)!}\\
\iff\quad n! &= \frac{(n-1)!\,(n-r)!\,r!}{(n-r-1)!\,r!} + \frac{(n-1)!\,(n-r)!\,r!}{(n-r)!\,(r-1)!}\\
\iff\quad n! &= \frac{(n-1)!\,(n-r)!\,\cancel{r!}}{(n-r-1)!\,\cancel{r!}} + \frac{(n-1)!\,\cancel{(n-r)!}\,r!}{\cancel{(n-r)!}\,(r-1)!}\\
\iff\quad n! &= \frac{(n-1)!\,(n-r)\cancel{!}}{\cancel{(n-r-1)!}} + \frac{(n-1)!\,r\cancel{!}}{\cancel{(r-1)!}}\\
\iff\quad n! &= (n-1)!\,(n-r) + (n-1)!\,r\\
\iff\quad n! &= (n-1)!\,((n-r)+r)\\
\iff\quad n! &= (n-1)!\,n\\
\iff\quad n! &= n!\\
\iff\quad 0 &= 0
\end{aligned}$$

(10) **B**

Num jogo de lotéria, tem os números de 1 até 60:

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

Os organizadores do jogo, escolhem aleatoriamente 6 números deles (sem repetições). Esses 6 números são chamados "a megasena". Um jogador marca pelo menos 6 números na sua lotéria e se conseguir ter marcados todos os 6 da megasena, ganha.

(Marcando mais que 6 números, as chances do jogador aumentam, mas o preço da lotéria aumenta também.)

(3) **B1.** Um jogador marcou 6 números. Qual a probabilidade que ele ganhe?
RESPOSTA.

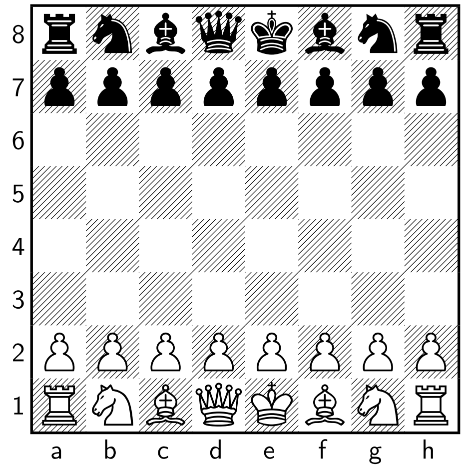
$$\boxed{\frac{1}{C(60,6)} \quad \left(= \frac{6!\,54!}{60!} = \frac{6!}{55\cdot 56\cdot 57\cdot 58\cdot 59\cdot 60} = \frac{1}{11\cdot 14\cdot 19\cdot 29\cdot 59\cdot 10} = \frac{1}{50063860}\right)}$$

(7) **B2.** Uma jogadora marcou 9 números. Qual a probabilidade que ela ganhe?
RESPOSTA.

$$\boxed{\frac{C(60-6,9-6)}{C(60,9)} = \frac{C(54,3)}{C(60,9)} \quad \left(= \frac{54!\,\cancel{51!}\,9!}{\cancel{51!}\,3!\,60!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{55\cdot 56\cdot 57\cdot 58\cdot 59\cdot 60} = \frac{3}{1787995}\right)}$$

(10) **C**

No xadrez, as regras mandam que as posições iniciais do jogo são as seguintes:



Um professor de xadrez pediu para seu aluno na segunda aula de xadrez colocar as peças brancas nas suas posições iniciais. O aluno—ele não é o melhor—lembra apenas:

(i) as posições de todos os peões brancos (são todos na linha 2).

(6) **C1.** Sem querendo assumir sua ignorância, o aluno colocou todas as outras peças na primeira linha chutando.

Qual a probabilidade que ele acertou?

Resolução.

O caso que ele acertou é apenas 1; então precisamos contar de quantas maneiras podemos colocar o resto das peças na primeira linha:

$$\underbrace{C(8,2)}_{\text{♖♖}}\underbrace{C(6,2)}_{\text{♘♘}}\underbrace{C(4,2)}_{\text{♗♗}}\underbrace{C(2,1)}_{\text{♕}}\underbrace{C(1,1)}_{\text{♔}} = \frac{8!\,\cancel{6!}\,\cancel{4!}\,\cancel{2!}}{\cancel{6!}\,2!\,\cancel{4!}\,\cancel{2!}\,2!\,2!} = \frac{8!}{2!\,2!\,2!} = 7!.$$

A probabilidade que ele acertou então é $\dfrac{1}{7!}$.

(4) **C2.** Se o aluno lembrar mais uma regra:

(ii) a rainha branca (♕) começa num quadradinho branco;

qual seria a probabilidade dele acertar?

Resposta.

$2 \cdot \dfrac{1}{7!} = \dfrac{1}{2520}.$

(16) **D**

Considere os inteiros $1, 2, \ldots, 30$.

(1) **D0.** De quantas maneiras podemos os permutar?

RESPOSTA: $30!$

(15) **D1.** Quantas dessas permutações têm a propriedade que nenhum dos múltiplos de 3 estão em posições consecutivas?

RESOLUÇÃO.

Primeiramente vamos esqueçer os múltiplos de 3. O resto dos (20) números pode ser permutado de $20!$ maneiras. Para qualquer dessa maneira, temos $C(21, 10)$ opções para escolher em quais 10 das $20 + 1$ possíveis posições vamos colocar os múltiplos de 3, e para cada escolha, correspondem $10!$ diferentes permutações dos múltiplos de 3 nessas 10 posições. Finalmente,

$$\underbrace{20!}_{\text{ordena os não-múltiplos}} \cdot \underbrace{C(21, 10)}_{\text{escolhe as posições dos múltiplos}} \cdot \underbrace{10!}_{\text{escolhe a ordem dos múltiplos}}$$

das $30!$ permutações têm a propriedade desejada.

(24) **E**

De quantas maneiras podemos escrever um string usando letras do alfabeto $\{\texttt{A}, \texttt{B}, \texttt{C}, \texttt{D}\}$, tais que *cada letra é usada exatamente duas vezes mas não aparece consecutivamente no string*?

Por exemplo:

`ABADCDBC`	é um string aceitável;
`ABACDDBC`	não é.

Dica: *Inclusão–Exclusão.*

Resolução.

Seja N o número de permutações totais das létras e defina as 4 propriedades

$$\begin{aligned}
\alpha &: \text{aparece o } \texttt{AA}\\
\beta &: \text{aparece o } \texttt{BB}\\
\gamma &: \text{aparece o } \texttt{CC}\\
\delta &: \text{aparece o } \texttt{DD}.
\end{aligned}$$

Procuramos o número dos strings de tamanho 8 que não tenham nenhuma dessas 4 propriedades. Assim que calcular os $N(\alpha), \dots, N(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ o princípio da Inclusão–Exclusão, vai nos dar número que procuramos.

Observamos que

$$\begin{gathered}
N(\alpha) = N(\beta) = N(\gamma) = N(\delta)\\
N(\alpha, \beta) = N(\alpha, \gamma) = \cdots = N(\gamma, \delta)\\
N(\alpha, \beta, \gamma) = \cdots = N(\beta, \gamma, \delta)
\end{gathered}$$

Calculamos os

$$\begin{aligned}
N &= \frac{8!}{2!\,2!\,2!\,2!} = 2520\\
N(\alpha) &= \frac{7!}{2!\,2!\,2!} = \frac{7!}{8} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 = 630\\
N(\alpha, \beta) &= \frac{6!}{2!\,2!} = \frac{6!}{4} = 180\\
N(\alpha, \beta, \gamma) &= \frac{5!}{2!} = \frac{5!}{2} = 60\\
N(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= 4! = 24.
\end{aligned}$$

Finalmente, temos

$$\begin{gathered}
N - C(4,1)N(\alpha) + C(4,2)N(\alpha, \beta) - C(4,3)N(\alpha, \beta, \gamma) + N(\alpha, \beta, \gamma, \delta)\\
(= 2520 - 4 \cdot 630 + 6 \cdot 180 - 4 \cdot 60 + 24 = 864.)
\end{gathered}$$

tais permutações!

(18) **F**

Temos 6 músicos disponíveis, onde cada um toca:

Alex:	violão, guitarra, baixo	Daniel:	guitarra
Bill:	bateria	Eduardo:	piano, teclado, violão, fláuto
Claudia:	saxofone, clarineto	Fagner:	guitarra, baixo, teclado

(Considere que uma banda precisa *pelo menos um membro*, todos os membros duma banda *precisam tocar pelo menos algo na banda*, e que cada banda é diferenciada pelos músicos e suas funções. Por exemplo: uma bande onde Alex toca o violão (apenas) e Bill a bateria, é diferente duma banda onde Alex toca o violão *e* a guitarra, e Bill a bateria, mesmo que seus membros podem ser os mesmos.

Dica: *Tradução.*

(6) **F1.** Quantas bandas diferentes podemos formar?

Resolução.

$2^{14} - 1$: para cada músico e cada instrumento, temos 2 opções: “sim” ou “não”. Tiramos 1 porque hipercontamos (a “banda vazia”).

(6) **F2.** Quantas bandas diferentes podemos formar com a restrição que nenhum músico tocará mais que um instrumento na banda (mesmo se em geral sabe tocar mais)?

Resolução.

Cada músico que toca i instrumentos tem $i + 1$ opções (e extra corresponde no “não participar na banda”): Podemos formar $4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 - 1$ bandas, onde de novo tiramos 1 para excluir a “banda vazia”.

(6) **F3.** Quantas bandas diferentes podemos formar onde todos os músicos fazem parte da banda?

Resolução.

Cada músico que toca i instrumentos tem $2^i - 1$ opções (tirando a opção de “não tocar nada”). Então podemos formar $7 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 15 \cdot 7$ bandas.

(24) **G**

De quantas maneiras podemos escrever um string ternário (usando o alfabeto $\{\texttt{0}, \texttt{1}, \texttt{2}\}$) de tamanho 7, tais que *nunca aparece neles o substring* `00`.

Por exemplo:

`0112220`	é um string aceitavel;
$\texttt{2}\underline{\texttt{00}}\texttt{1}\underline{\texttt{0}\overline{\texttt{0}}}\overline{\texttt{0}}$	não é.

Dica: Recursão.

Resolução.

Seja $a(n)$ o número dos strings ternários de tamanho n tais que nunca aparece neles o substring `00`. Quermos achar o $a(8)$.

Observe que:

$$
\begin{aligned}
a(0) &= 1 && \text{(o string vazio: “ ”)} \\
a(1) &= 3 && \text{(os strings: “}\texttt{0}\text{”, “}\texttt{1}\text{”, e “}\texttt{2}\text{”)} \\
a(n) &= \underbrace{a(n-1)}_{\texttt{1...}} + \underbrace{a(n-1)}_{\texttt{2...}} + \underbrace{a(n-2)}_{\texttt{01...}} + \underbrace{a(n-2)}_{\texttt{02...}} \\
&= 2a(n-1) + 2a(n-2) \\
&= 2(a(n-1) + a(n-2))
\end{aligned}
$$

Então calculamos os primeiros 8 termos da sequência:

$$1, 3, 8, 22, 60, 164, 448, \underbrace{1224}_{a(7)}.$$

(16) **H**

Conta todas as palavras feitas por permutações das 12 letras da palavra

`PESSIMISSIMO`

onde...

(3) **H0.** A palavra começa com `P`.
Resposta.

$$\frac{11!}{1!\,4!\,3!\,2!\,1!}$$

(3) **H1.** Todos os `I` aparecem *juntos*.
Resposta.

$$\frac{10!}{4!\,2!}$$

(5) **H2.** Todos os `M` aparecem *separados*.
Resposta.

$$\frac{12!}{4!\,3!\,2!} - \frac{11!}{4!\,3!}$$

(5) **H3.** Nenhum dos `S` aparece ao lado de outro `S`.
Resposta.

$$\frac{8!}{3!\,2!} \cdot C(9,4)$$

Só isso mesmo.