FMC1, 2016.2
(Turmas do Thanos)

Provinha 1.1
(points: 66/100; bonus: $12^\flat$; time: 100')

Nome: Θάνος **Gabarito**

07/10/2016

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\, [\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC1})]$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho antes de usá-la.

VIII. Entregue *todas* as folhas de rascunho juntas com tua prova.

IX. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

X. Os pontos bônus duma unidade são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

Boas provas!

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor já desistir.
[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota final de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

(52) **A**

(4) **A0.** Defina formalmente o que significa a frase *"o real x é irracional"*.
(Não suponhas que o leitor já saiba o significado da palavra *racional*.)

DEFINIÇÃO.

O real x é irracional sse não existem inteiros p e q tais que $x = p/q$.

(2) **A1.** Seja $a \in \mathbb{N}$. Qual número $x \in \mathbb{R}$ é denotado por $\sqrt[3]{a}$?

Dica: *Podes começar tua definição assim:* $x = \sqrt[3]{a} \overset{\triangle}{\iff} \cdots$

DEFINIÇÃO.

$x = \sqrt[3]{a} \overset{\triangle}{\iff} x^3 = a$

(23) **A2.** Prove o seguinte: *para todo $n \in \mathbb{Z}$, se $3 \mid n^3$, então $3 \mid n$.*

PROVA.

Seja $n \in \mathbb{Z}$. Vamos provar o contrapositivo da implicação, ou seja, que

$$3 \nmid n \implies 3 \nmid n^3.$$

Suponha que $3 \nmid n$. Queremos mostrar que $3 \nmid n^3$. Existem dois casos:

CASO 1: $n = 3a + 1$ para algum $a \in \mathbb{Z}$. Nesse caso, temos:

$$\begin{aligned} n^3 &= (3a+1)^3 \\ &= 27a^3 + 27a^2 + 9a + 1 \\ &= 3(9a^3 + 9a^2 + 3a) + 1, \end{aligned}$$

que (como $9a^3 + 9a^2 + 3a \in \mathbb{Z}$) mostra que $3 \nmid n^3$.

CASO 2: $n = 3a + 2$ para algum $a \in \mathbb{Z}$. Calculando,

$$\begin{aligned} n^3 &= (3a+2)^3 \\ &= 3^3a^3 + 3 \cdot 3^2a^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3a \cdot 2^2 + 2^3 \\ &= 3 \cdot 9a^3 + 3 \cdot 18a^2 + 3 \cdot 12a + 3 \cdot 2 + 2 \\ &= 3\,\underbrace{(9a^3 + 18a^2 + 12a + 2)}_{\text{inteiro}} + 2. \end{aligned}$$

Logo, nesse caso também temos $3 \nmid n^3$, que termina nossa prova. ∎

(23) **A3.** Prove que o número real $\sqrt[3]{3}$ é irracional.

Dica: *Reductio ad absurdum.*

PROVA.

Para chegar num absurdo, suponho que $\sqrt[3]{3} \in \mathbb{Q}$. Então existem $p, q \in \mathbb{Z}$, tais que $\sqrt[3]{3} = p/q$. Além disso, podemos assumir que

$$\text{pelo menos um dos } p \text{ e } q \text{ não é divisível por 3} \tag{1}$$

(ou, até mais, que p/q é uma fracção irredutível, mas não precisamos algo tão forte).

Pela definição do $\sqrt[3]{3}$, $\left(\sqrt[3]{3}\right)^3 = 3$. Substituindo, obtenimos

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 = 3,$$

ou seja,

$$p^3 = 3q^3. \tag{2}$$

Logo, $3 \mid p^3$. Aplicando o Lema **A2**, ganhamos que $3 \mid p$, ou seja, $p = 3u$ para algum $u \in \mathbb{Z}$. Substituindo isso na equação (2), temos:

$$\begin{aligned}(3u)^3 = 3q^3 &\iff 3^3u^3 = 3q^3 \\ &\iff 3^2u^3 = q^3 \\ &\iff 3(3u^3) = q^3.\end{aligned}$$

Logo, $3 \mid q^3$, e usando o mesmo Lema **A2** de novo, $3 \mid q$, que é absurdo, por causa da restrição (1). ∎

$(14 + 12^\flat)$ B

Seja $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

(14) **B0.** Defina recursivamente a função $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que satisfaz:

$$t(n) = h(0)h(1)\cdots h(n-1) = \prod_{i=0}^{n-1} h(i).$$

Dica: *Depois de definir, confira tua definição seguindo ela para calcular o valor $t(2)$, que deveria dar o resultado $t(2) = h(0)h(1)$.*

DEFINIÇÃO.

$$\begin{aligned} t &: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ t(0) &= 1 \\ t(n+1) &= h(n) \cdot t(n). \end{aligned}$$

ou, tendo definido a T,
$t(n) = T(0, n)$

$(12^\flat)$ **B1.** Defina recursivamente a função $T : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ que satisfaz:

$$T(m,n) = h(m)h(m+1)\cdots h(m+n-1) = \prod_{i=m}^{m+n-1} h(i).$$

Dica: *(i) Mesmo que a função T tem aridade 2, escolhendo bem, tu não precisarás escrever 4 equações, mas apenas 2. (ii) Depois de definir, confira tua definição seguindo ela para calcular o valor $T(5,2)$, que deveria dar o resultado $T(5,2) = h(5)h(6)$.*

DEFINIÇÃO.

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R} \\ T(m,0) &= 1 \\ T(m,k+1) &= h(m+k) \cdot T(m,k). \end{aligned}$$

ou, tendo definido a t,
$\underbrace{T(m,n) = t(m+n)/t(m)}_{\text{por que isso é errado?}}$

Só isso mesmo.