FMC1, 2016.2
(Turmas do Thanos)

Provinha 1.0
(points: 34/100; bonus: $21^\flat$; time: 100')

Nome: **Turma:**

02/09/2016

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\,[\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC1})]$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho antes de usá-la.

VIII. Entregue *todas* as folhas de rascunho juntas com tua prova.

IX. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor já desistir.

$(18 + 12^\flat)$ **A**

(1) **A0.** Dar uma definição certa e formal (em português!) do que significa que

o inteiro n é ímpar.

Não assume que o leitor já saiba o significado da palavra “*par*”.

DEFINIÇÃO.

Um inteiro n é *ímpar* sse existe inteiro k tal que $n = 2k + 1$.

$(4^\flat)$ **A1.** Sejam as fórmulas

$$A = \exists x\,(P(x) \land Q(x)) \qquad C = \forall x\,(P(x) \lor Q(x))$$
$$B = \exists x P(x) \land \exists x Q(x) \qquad D = \forall x P(x) \lor \forall x Q(x).$$

Prove que $A \not\equiv B$:

No mundo com universo $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, e onde

$$P(x) \overset{\triangle}{\iff} x \text{ é par}$$
$$Q(x) \overset{\triangle}{\iff} x \text{ é ímpar},$$

a A é falsa, mas e B é verdadeira.

e $C \not\equiv D$:

No mesmo mundo, a C é verdadeira, mas a D é falsa.

Dica: *Criar um mundo onde uma das duas fórmulas é verdadeira, e a outra falsa.*

$(8 + 8^\flat)$ **A2.** Escrevendo uma fórmula de lógica, definir os predicados

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Even}(n) &\iff n \text{ é par} & \qquad \mathrm{Nat}(n) &\iff n \in \mathbb{N} \\
\mathrm{Square}(n) &\iff \sqrt{n} \in \mathbb{Z} & \qquad \mathrm{Leq}(x, y) &\iff x \leq y \\
\mathrm{Div}(a, b) &\iff a \text{ divide } b & \qquad \mathrm{Prime}(p) &\iff p \text{ é primo.}
\end{aligned}
$$

Considere que o universo é o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$. Tu podes usar:

- os símbolos lógicos $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$;
- a igualdade $=$;
- as parenteses '(' e ')';
- as variáveis $a, b, c, \ldots, x, y, z$;
- os seguintes símbolos-funções: addição $(+)$ e multiplicação $(\cdot)$;
- os constantes ("nomes") dos inteiros: $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$;
- o símbolo-predicado $<$ da ordem estrita dos inteiros;
- *nada* mais![3]

Bonus: $(\times 2)$ se conseguir resolver sem usar nem constantes nem o $<$.

$$\mathrm{Even}(n) \overset{\triangle}{\iff} \boxed{\begin{array}{c} \exists x\, n = 2 \cdot x \\ \exists x\, n = x + x \end{array}}$$

$$\mathrm{Square}(n) \overset{\triangle}{\iff} \boxed{\begin{array}{c} \exists x\, n = x \cdot x \\ \exists x\, n = x \cdot x \end{array}}$$

$$\mathrm{Div}(a, b) \overset{\triangle}{\iff} \boxed{\begin{array}{c} \exists m\, a \cdot m = b \\ \exists m\, a \cdot m = b \end{array}}$$

$$\mathrm{Nat}(n) \overset{\triangle}{\iff} \boxed{\begin{array}{c} -1 < n \\ \exists a\, \exists b\, \exists c\, \exists d\, n = a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c + d \cdot d \end{array}}$$

$$\mathrm{Leq}(x, y) \overset{\triangle}{\iff} \boxed{\begin{array}{c} x < y \vee x = y \\ \exists n\, (\mathrm{Nat}(n) \wedge x + n = y) \end{array}}$$

$$\mathrm{Prime}(p) \overset{\triangle}{\iff} \boxed{\begin{array}{c} \mathrm{Leq}(2, p) \wedge \forall d\, (\mathrm{Nat}(d) \wedge \mathrm{Div}(d, p) \rightarrow (d = 1 \vee d = p)) \\ \mathrm{Nat}(p) \wedge \neg\mathrm{Idem}(p) \wedge \forall a \forall b\, (\mathrm{Nat}(a) \wedge \mathrm{Nat}(b) \wedge p = a \cdot b \rightarrow a = p \vee b = p) \\ \mathrm{Nat}(p) \wedge \neg\mathrm{Idem}(p) \wedge \forall d\, [(\mathrm{Nat}(d) \wedge \mathrm{Div}(d, p)) \rightarrow (\mathrm{One}(d) \vee d = p)] \\ \text{onde: } \begin{cases} \mathrm{Idem}(i) \overset{\triangle}{\iff} (i = i \cdot i) \\ \mathrm{One}(u) \overset{\triangle}{\iff} \forall x\, (x \cdot u = x) \end{cases} \end{array}}$$

[3]Se tu quiseres usar qualquer outra coisa, abreviação, *etc.*, tu tens que a definir primeiro *usando apenas o que foi permitido*. Depois da sua definição, tu podes usá-la.

(9) **A3.** Definindo (em português!) predicados adequados, traduza as seguintes frases para fórmulas de lógica de predicados, onde o universo é o conjunto de todos os animais.[4]

Predicados:

$$
\begin{aligned}
J(x) &\stackrel{\triangle}{\iff} x \text{ é uma joaninha}\\
P(x) &\stackrel{\triangle}{\iff} x \text{ tem pintas}\\
F(x) &\stackrel{\triangle}{\iff} x \text{ é feio}\\
C(x) &\stackrel{\triangle}{\iff} x \text{ é um cachorro}\\
A(x,y) &\stackrel{\triangle}{\iff} x \text{ ama } y\\
T(x,y) &\stackrel{\triangle}{\iff} x \text{ teme } y
\end{aligned}
$$

Dica: Define os predicados $J(x)$, $P(x)$, $F(x)$, $C(x)$, $A(x,y)$, e $T(x,y)$.

Frases:

(i) Existem joaninhas sem pintas.

$\exists x\,(J(x) \land \neg P(x))$

(ii) Todos os cachorros exceto o Argos são feios.

$\forall x\,((C(x) \land x \neq \text{Argos}) \to F(x))$

(iii) x ama pelo menos duas joaninhas.

$\exists a\,\exists b\,(J(a) \land J(b) \land A(x,a) \land A(x,b) \land a \neq b)$

(iv) Snoopy é o único cachorro que Eva não teme.

$C(\text{Snoopy}) \land \neg T(\text{Eva}, \text{Snoopy}) \land \forall x\,(C(x) \land x \neq \text{Snoopy} \to T(\text{Eva}, x))$

[4] Tente perder o menor possível da estrutura/lógica da cada frase nas tuas traduções.

$(16 + 9^\flat)$ **B**

$(\text{A0} \Rightarrow 4^\flat)$ **B0.** Assumindo apenas tua definição de "ímpar" no A0, prove que:

para todo $n \in \mathbb{N}$, e todo ímpar $k \in \mathbb{Z}$, k^n é ímpar.

PROVA.

Seja $k \in \mathbb{Z}$ ímpar, então $k = 2a + 1$ para um $a \in \mathbb{Z}$. Vamos provar por indução que para todo $n \in \mathbb{N}$, k^n é ímpar. Se $n = 0$, imediatamente $k^0 = 1$ é ímpar. Suponha que para algum $t \in \mathbb{N}$, k^t é ímpar, ou seja $k^t = 2b + 1$ para um $b \in \mathbb{Z}$. Falta provar que k^{t+1} também é ímpar. Calculando,

$$\begin{aligned} k^{t+1} &= kk^t \\ &= (2a+1)(2b+1) \\ &= 4ab + 2a + 2b + 1 \\ &= 2(2ab + a + b) + 1. \end{aligned}$$

Logo, como $2ab + a + b \in \mathbb{Z}$, k^{t+1} é ímpar. ∎

(B0 $\Rightarrow 9^\flat$) **B1.** Considere as funções q, r e t definidas recursivamente:

$$
\begin{array}{rcl}
q &:& \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\
q(0) &=& 0 \\
q(1) &=& 0 \\
q(2) &=& 0 \\
q(n+3) &=& q(n) + 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
r &:& \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\
r(0) &=& 0 \\
r(1) &=& 1 \\
r(2) &=& 2 \\
r(n+3) &=& r(n)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
t &:& \mathbb{N}^2 \to \mathbb{B} \\
t(0,0) &=& \mathsf{True} \\
t(0,Sn) &=& \mathsf{False} \\
t(Sm,0) &=& \mathsf{False} \\
t(Sm,Sn) &=& t(m,n)
\end{array}
$$

O que cada função calcula? (Pode ser em português ou em matemática.)

$q(n)$

$q(n) = \left\lfloor \dfrac{n}{3} \right\rfloor.$

$r(n)$

O $r(n)$ é o resto da divisão do n por 3.

$t(m,n)$

A t decida se suas entradas são iguais ou não.

Dica: *Calcule os valores* $q(11)$, $q(12)$, $r(11)$, e $r(12)$.

(12) **B2.** Os *números Fibonacci* e os *números Lucas* são definidos recursivamente assim:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 & L_0 &= 2 \\ F_1 &= 1 & L_1 &= 1 \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n & L_{n+2} &= L_{n+1} + L_n. \end{aligned}$$

Para $n \geq 1$, seja $\ell : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ a função definida pela equação

$$\ell(n) = F_{n-1} + F_{n+1}.$$

Prove que para todo $n \geq 1$, $L_n = \ell(n)$.

Prova.

Nos vamos provar por indução que *para todo* $n \geq 1$, $L_n = \ell(n)$. Vamos primeiramente verificar que para $n = 1$ e $n = 2$, realmente temos $L_n = \ell(n)$:

$$\begin{aligned} L_1 &= 1 && \text{(def. de } L_n) & L_2 &= L_1 + L_0 && \text{(def. de } L_n) \\ & && & &= 1 + 2 && \text{(def. de } L_n) \\ & && & &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ell(1) &= F_0 + F_2 && \text{(def. de } \ell(n)) & \ell(2) &= F_1 + F_3 && \text{(def. de } \ell(n)) \\ &= 0 + F_1 + F_0 && \text{(def. de } F_n) & &= 1 + F_2 + F_1 && \text{(def. de } F_n) \\ &= 0 + 1 + 0 && \text{(def. de } F_n) & &= 1 + F_1 + F_0 + 1 && \text{(def. de } F_n) \\ &= 1 && & &= 1 + 1 + 0 + 1 && \text{(def. de } F_n) \\ & && & &= 3. \end{aligned}$$

Agora supondo que para um natural $k \geq 1$ temos

$$L_k = \ell(k) \qquad \text{e} \qquad L_{k+1} = \ell(k+1)$$

(hipoteses indutivas), precisamos provar que

$$L_{k+2} = \ell(k+2).$$

Realmente temos

$$\begin{aligned} L_{k+2} &= L_{k+1} + L_k && \text{(def. de } L_n) \\ &= \ell(k+1) + \ell(k) && \text{(H.I.)} \\ &= (F_k + F_{k+2}) + (F_{k-1} + F_{k+1}) && \text{(def. de } \ell(n),\ k \geq 1) \\ &= \underbrace{F_k + F_{k-1}}_{F_{k+1}} + \underbrace{F_{k+2} + F_{k+1}}_{F_{k+3}} && \text{(ass. e com. de } +) \\ &= F_{k+1} + F_{k+3} && \text{(def. de } F_n,\ k \geq 1) \\ &= \ell(k+2) && \text{(def. de } \ell(n)), \end{aligned}$$

que termina nossa prova. ∎

Só isso mesmo.