FMC1, 2016.1

(Turma do Thanos)

Problem set A[1]

A.1 Prove que

$$1 + 8 + 27 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

A.2 Observando os valores de:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} &= 2 - \frac{1}{2} \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} &= 2 - \frac{1}{4} \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} &= 2 - \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

adivinhe uma fórmula geral para o somatório

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

e prove que ela é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

A.3 Calculando os valores de:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right), \qquad \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right), \qquad \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right),$$

adivinhe uma fórmula geral para o produto

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

e prove que ela é válida para todo $n \geq 2$.

A.4 Prove que

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

para todo $n \geq 0$.[2]

A.5 Prove que

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

para todo $n \geq 0$.

A.6 Qualquer número inteiro positivo $n \geq 8$ pode ser escrito como uma soma de 3's e 5's.

---

[1] Em português péssimo $\frown\!\!\!\!\!\ddot{}$

[2] Lembre que o somatório vazio é 0.

A.7 Seja

$$P(n) \overset{\triangle}{\iff} 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{8}\,(2n+1)^2$$

(i) Prove que "$P(k) \implies P(k+1)$", onde $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Critique a sentença: "Logo, por indução temos que $P(n)$ é válido para todo $n \in \mathbb{N}$."

(iii) Mudando o "=" para ">" ou "<", define um novo predicado $P'(n)$, válido para todo $n \in \mathbb{N}$, e prove a validade dele por indução.

A.8 Prove que

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

para todo $n \geq 1$.

A.9 Prove que $n^2 < 2^n$ para todo $n \geq 5$.