CATS, 2023.1
(Turma T56 do Thanos)

Prova 1.2
(points: 28; bonus: $0^\flat$; time: 96')

Nome:

2023-05-15

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{CATS})\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas.

VII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

VIII. **Escolhe até 2 dos $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$.**[3]

Definitions

Definition. Let L be a lattice and $I \subseteq L$. We call I an *ideal* of L iff I is an inhabited downset that is $(\vee)$-closed.

Definition. Let P be a p(r)oset. For any $a, b \in P$, we define the *interval*

$$[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{\, x \mid a \leq x \leq b \,\}$$

Definition. Let P be a p(r)oset and $K \subseteq P$. We define

$$K \text{ convex} \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall a, b \in K)\,[\,[a, b] \subseteq K\,]$$

and denote the set of all convex subsets of P by $\mathcal{K}(P)$.

Esclarecimento:
Suas respostas precisam ser escritas numa linguagem "high-level" sem sacrificar rigor nem introduzir ambigüidades.

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(12) **B**

B1. Demonstre **exatamente uma** das:
(i) Let L, K be bounded lattices and $f : L \to K$ a homomorphism. Then $f^{-1}(0)$ is an ideal of L.
(ii) Let L be a lattice and

$$J_0 \subseteq J_1 \subseteq J_2 \subseteq \cdots$$

a ($\subseteq$)-chain of ideals of L. Then $\bigcup_n J_n$ is an ideal.
DEMONSTRAÇÃO DA __ .

B2. Draw $\mathcal{K}(\mathbf{3})$ and list all of its ideals.
ANSWER.

B3. For any lattice L, and any $a, b \in L$, $[a, b]$ is a sublattice of L.
DEMONSTRAÇÃO.

(16) C

(4) **C1.** Let P, Q be finite posets with lengths n and m respectively. Without proving, guess:

$$\ell(P \times Q) = \qquad \ell(P \otimes Q) = \qquad \ell(P \mathbin{\dot\cup} Q) = \qquad \ell(P \oplus Q) =$$

(12) **C2.** Let M be a modular lattice, and $a, b \in M$. Find a lattice isomorphism that establishes

$$[b, a \vee b] \cong [a \wedge b, a].$$

DEMONSTRAÇÃO.

(6) D

In any lattice,

D1. $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ & $x \vee (y \wedge z) \geq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$; (safe-distr)

D2. $x \leq z \implies x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$; (safe-modul)

D3. $(- \vee c)$ and $(- \wedge c)$ are monotone. (monotonicity)

Demonstre **exatamente uma** delas.

DEMONSTRAÇÃO DE ___.

Só isso mesmo.

Rascunho