(42) **R** *Escolha 5 das* **R1**, **R2**, **R3**, **R4**, **R5**, **R6**.

(21) **R1.** Todo homomorfismo entre corpos é injetivo e respeita inversos e frações.
(21) **R2.** Seja D domínio de integridade finito. Demonstre que D é um corpo.
(21) **R3.** Homomorfismos de aneis refletem ideais.
(21) **R4.** Os únicos ideais dum corpo são o 0 e o próprio corpo.
(21) **R5.** Seja I ideal dum anel $\mathcal{R}$. Demonstre: I primo $\iff$ $\mathcal{R}/I$ int.dom. R Comm
(21) **R6.** Seja I ideal dum anel $\mathcal{R}$. Demonstre: I maximal $\iff$ $\mathcal{R}/I$ corpo.
(Corolário: I maximal $\implies$ I primo)

DEMONSTRAÇÃO DA R5 .

? $a, b \in \mathcal{R}$

($\Rightarrow$):
Sejam I primo e $(I+a)$, $(I+b)$ t.q. $(I+a)(I+b) = I$. ✓
Como $I = (I+a)(I+b) = (I+ab)$, logo $ab \in I$ ✓ [Lemma 1, $a := ab$] FMC2
Logo $a \in I$ ou $b \in I$ [I primo] ✓
Caso $a \in I$:
$(I+a) = I$ [Lemma 1]
Caso $b \in I$:
Similar. ✓ //

($\Leftarrow$): sejam $\mathcal{R}/I$ int dom e
$a, b \in \mathcal{R}$ tq $ab \in I$.
logo, $(I+ab) = I$ [Lemma 1].
logo, $(I+a) = I$ ou $(I+b) = I$
Caso $(I+a) = I$:
Imediato. [Lemma 1]
Caso $(I+b) = I$:
Similar. ✓

■

DEMONSTRAÇÃO DA R3 .

Sejam $\varphi : R_1 \to R_2$ e I ideal de R_2
-- ALVO: $\varphi^{-1}[I]$ é ideal de R_1

p/ absorver pela $(\cdot)$ no R_1:
Seja $i \in \varphi^{-1}[I]$ e $r \in R_1$

subgrupo:
sejam $a, b \in \varphi^{-1}[I]$
$a - b \in$ //

(42) **E** *Escolha 2 das* **E1**, **E2**, **E3**.

(21) **E1.** Seja $K : F$ extensão finita. Mostre que todo $a \in K$ é algébrico sobre o F.

(21) **E2.** Qualquer ideal de $F[x]$ é principal.

(21) **E3.** Seja c algébrico sobre o F. Demonstre: $[F(c) : F] = \deg(\text{min. poly de } c \text{ sobre } F)$.

DEMONSTRAÇÃO DA E2 .

Seja I ideal de $F[X]$ e $p(x) \in F[X]$ ~~o~~ um polinômio de menor grau de $F[X]$

Caso $I = \{0\}$

testemunho 0

Caso $I \neq \{0\}$

seja $a(x) = q(x) \cdot p(x) + r(x)$ t.q $\deg(r(x)) < \deg(p(x))$ ou $r(x) = 0$

Caso $r(x) = 0$

Como $a(x) = q(x)p(x)$, testemunho $a(x)$

Caso $\deg(r(x)) < \deg(p(x))$

$p(x)$ é o polinômio de menor grau. $\perp$

✓

DEMONSTRAÇÃO DA ______ .

(16) **Q**

$\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

Dica: Calcule umas potências de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

DEMONSTRAÇÃO.

$(\supseteq)$:

$\mathbb{Q}$ é $(+)$-fechado, portanto $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} \overset{+}{,} \sqrt{3})$,

assim como os elementos derivados da indução do $(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

??

Só isso mesmo.

$J+1=J$

(42) **R** *Escolha 5 das* **R1**, **R2**, **R3**, **R4**, **R5**, **R6**.

(21) **R1.** Todo homomorfismo entre corpos é injetivo e respeita inversos e frações.
(21) **R2.** Seja D domínio de integridade finito. Demonstre que D é um corpo.
(21) **R3.** Homomorfismos de aneis refletem ideais.
(21) **R4.** Os únicos ideais dum corpo são o (0) e o próprio corpo.
(21) **R5.** Seja I ideal dum anel $\mathcal{R}$. Demonstre: I primo $\iff \mathcal{R}/I$ int.dom.
(21) **R6.** Seja I ideal dum anel $\mathcal{R}$. Demonstre: I maximal $\iff \mathcal{R}/I$ corpo.
(Corolário: I maximal $\implies I$ primo)

DEMONSTRAÇÃO DA R5.

($\Rightarrow$):
~~Parte $ab=0 \Rightarrow a=0$ ou $b=0$)~~
Sejam $a, b \in R$, t.q. $(I+a)\cdot(I+b) = I$.
Logo $I+(ab) = I$.
Logo $ab \in I$.
Logo $a \in I$ ou $b \in I$.
Caso $a \in I$:
Logo $I+a = I$.
Caso $b \in I$:
similar.

($\Leftarrow$):
Sejam $a, b \in R$, t.q. $ab \in I$.
Logo $I+(ab) = I$.
Logo $(I+a)(I+b) = I$.
Logo $I+a = I$ ou $I+b = I$ [R/I int. dom].
Caso $I+a = I$:
Logo $a \in I$.
Caso $I+b = I$.
Similar.

DEMONSTRAÇÃO DA R3.

Sejam R, S aneis.
Seja $\varphi : R \to S$ homo.
Seja $J \trianglelefteq S$.
Parte $\varphi^{-1}[J]$ habitado:
Temos $\varphi 0 \in J$ [J ideal].
Logo $0 \in \varphi^{-1}[J]$.
Parte $\varphi^{-1}[J]$ L-absorve:
Seja $r \in R$ e $x \in \varphi^{-1}[J]$.
Logo $\varphi x \in J$.
Logo $(\varphi x)(\varphi r) \in J$ [J Absorve]
Logo $\varphi(xr) \in J$ [φ-homo].
Logo $xr \in \varphi^{-1}[J]$

Parte $\varphi^{-1}[J]$ R-absorve:
Similar.
Parte $\varphi^{-1}[J]$ (+)-fechado:
Sejam $x, y \in \varphi^{-1}[J]$.
Logo $\varphi x, \varphi y \in J$.
Logo $(\varphi x)+(\varphi y) \in J$ [J (+)-fechado].
Logo $\varphi(x+y) \in J$ [φ homo].
Logo $x+y \in \varphi^{-1}[J]$.

(42) **E**

Escolha 2 das **E1**, **E2**, **E3**.

(21) **E1.** Seja $K : F$ extensão finita. Mostre que todo $a \in K$ é algébrico sobre o F.
(21) **E2.** Qualquer ideal de $F[x]$ é principal.
(21) **E3.** Seja c algébrico sobre o F. Demonstre: $[F(c) : F] = \deg(\text{min. poly de } c \text{ sobre } F)$.

DEMONSTRAÇÃO DA E2.

Seja $J \trianglelefteq F[x]$.
Divido em casos $J = \{0\}$ ou $J \neq \{0\}$.
Caso $J = \{0\}$:
Trivialmente 0.
Caso $J \neq \{0\}$:
Logo seja $p(x) \in J$ t.q. $p(x)$ mínimo.
Basta demonstrar $J = \langle p(x) \rangle$.
($\subseteq$):
Seja $t(x) \in J$.
Divido $t(x)$ por $p(x)$.

Logo sejam $q(x), r(x) \in F[x]$ t.q. $t(x) = q(x)p(x) + r(x)$ e $r(x) = 0$ ou $d(r(x)) < d(p(x))$.
Caso $r(x) = 0$:
Imediato $[t(x) = q(x)p(x)]$.
Caso $d(r(x)) < d(p(x))$:
Temos $t(x) = q(x)p(x) + r(x)$
Logo $r(x) = t(x) - q(x)p(x)$.
Como $q(x)p(x) \in J$ e $t(x) \in J$, logo $r(x) \in J$.
Como $p(x)$ mínimo e $d(r(x)) < d(p(x))$
Contradição.

DEMONSTRAÇÃO DA E1.

Sejam F, K corpos.
Seja $\varphi : F \to K$ homo.
Parte resp. inv.:
Seja $x \in F$, t.q. $x \neq 0$.
Calculamos:
$(\varphi x)(\varphi x^{-1}) = \varphi(x x^{-1})$ [φ-resp. ·]
$= \varphi 1$ [x^{-1} é o inverso de x].
$= 1$ [φ-resp 1].
Como $x \neq 0$, logo $\varphi x \neq 0$.

Logo temos $(\varphi x)(\varphi x)^{-1} = 1$.
Logo $(\varphi x)(\varphi x)^{-1} = (\varphi x)(\varphi x^{-1})$.
Logo $(\varphi x)^{-1} = \varphi x^{-1}$ [(·)-cancel].
Parte resp. div.:
Sejam $a, b \in F$, t.q. $b \neq 0$.
Temos $(\varphi a)(\varphi b)(\varphi b^{-1}) = \varphi a$. ?
Também temos $(\varphi a)(\varphi b)(\varphi b)^{-1} = \varphi a$. ?
Logo $(\varphi a)(\varphi b)(\varphi b)^{-1} = (\varphi a)(\varphi b)(\varphi b^{-1})$.

$a/b = a \cdot b^{-1}$
e φ resp $(\cdot)$ & $(\_^{-1})$.

(16) **Q**

$\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

Dica: Calcule umas potências de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

DEMONSTRAÇÃO.

Basta demonstrar $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ e $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.
Parte $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$:
Como $\sqrt{2}, \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, logo $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$
[$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ é (+)-fechado]. ✓ (?)
Parte $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$:

Só isso mesmo.

$a + b(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ $\quad 2 = a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2ab\sqrt{3} + 5b^2 + b^2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

$a + b\sqrt{2} + b\sqrt{3}$ $\quad 2 = a^2 + 2ab(\sqrt{2}+\sqrt{3}) + 5b^2 + b^2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

$2 = a^2 + (\sqrt{2}+\sqrt{3})(2ab + b) + 5b^2$

$\frac{2 - a^2 - 5b^2}{2ab + b^2} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

$\sqrt{2} = a + b\sqrt{2} + b\sqrt{3}$
$2 = a^2 + ab\sqrt{2} + ab\sqrt{3} + ab\sqrt{2} +$
$2b^2 + b^2\sqrt{3} + ab\sqrt{3} + b^2\sqrt{2}\sqrt{3} +$
$3b^2$

Caio Vinicius de Azevedo Melo

(42) **E**

Escolha 2 das **E1**, **E2**, **E3**.

(21) **E1.** Seja $K : F$ extensão finita. Mostre que todo $a \in K$ é algébrico sobre o F.
(21) **E2.** Qualquer ideal de $F[x]$ é principal.
(21) **E3.** Seja c algébrico sobre o F. Demonstre: $[F(c) : F] = \deg(\text{min. poly de } c \text{ sobre } F)$.

DEMONSTRAÇÃO DA E2.

($\supseteq$):
Seja $s(x) \in \langle p(x) \rangle$.
Logo seja $t(x) \in F[x]$, t.q. $s(x) = t(x)p(x)$.
Logo $t(x)p(x) \in J$ [$p(x) \in J$ e J ideal].
Logo $s(x) \in J$.

DEMONSTRAÇÃO DA E1.

Logo $(\varphi a)(\varphi b)^{-1} = (\varphi a)(\varphi b^{-1})$ [(·)-cancel].
Logo $(\varphi a)(\varphi b)^{-1} = \varphi(a b^{-1})$ [φ-resp (·)-inv].
Parte φ injetiva.
Sejam $x, y \in F$, t.q. $\varphi x = \varphi y$.
Separo em casos $x = y$ ou $x \neq y$.
Caso $x = y$:
Imediato.
Caso $x \neq y$: ?? X
Logo $\varphi x \neq \varphi y$.
Contradição [$\varphi x = \varphi y$].

(16) **Q**

$\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

Dica: Calcule umas potências de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

DEMONSTRAÇÃO.

Só isso mesmo.

(42) **R** *Escolha* 2 *das* **R1**, **R2**, **R3**, **R4**, **R5**, **R6**.

(21) **R1.** Todo homomorfismo entre corpos é injetivo e respeita inversos e frações.
(21) **R2.** Seja D domínio de integridade finito. Demonstre que D é um corpo.
(21) **R3.** Homomorfismos de aneis refletem ideais.
(21) **R4.** Os únicos ideais dum corpo são o 0 e o próprio corpo.
(21) **R5.** Seja I ideal dum anel $\mathcal{R}$. Demonstre: I primo $\iff$ $\mathcal{R}/I$ int.dom.
(21) **R6.** Seja I ideal dum anel com $\mathcal{R}$. Demonstre: I maximal $\iff$ $\mathcal{R}/I$ corpo.
(Corolário: I maximal $\overset{\text{com}}{\Longrightarrow}$ I primo)

Demonstração da R4.

<table>
<tr>
<td>
Sejam F corpo e $J \trianglelefteq F$.
Queremos mostrar que $J = \{0\}$ ou $J = F$.
Caso $J = \{0\}$:
Imediato.
Caso $J \neq \{0\}$:
Como $J \neq \{0\}$ logo $1 \in J$. (i)
Logo, $J = R$. (ii)
</td>
<td>
Lemma (i)
F corpo, $J \trianglelefteq F$ e $J \neq \{0\}$ $\Longrightarrow$ $1 \in J$.
Seja $a \neq 0 \in J$.
Logo, seja $a' \in F$ tq. $aa' = 1$. $[a \neq 0]$
Logo, como $J \trianglelefteq F$, logo $aa' \in J$.
Logo $1 \in J$.
(ii)
$1 \in J \Longrightarrow J = F$.
$\subseteq$): Imediato. $[J \subseteq F]$.
$\supseteq$): Seja $f \in F$.
como $1 \in J$, logo $1f \in J$. $[J \trianglelefteq F]$
Logo, $f \in J$.
</td>
</tr>
</table>

Demonstração da R5.

<table>
<tr>
<td>
$\Rightarrow$) Como R/I é um anel com. basta demonstrar que
$(\forall a,b \in R)[(I+a)(I+b) = I \Longrightarrow (I+a) = I$ ou $(I+b) = I]$
Sejam $a, b \in R$ tq. $(I+a)(I+b) = I$.
Temos que $(I+ab) = (I+a)(I+b) = I$.
Logo $ab \in I$.
Logo $a \in I$ ou $b \in I$. [I primo]
∎
</td>
<td>
$\Leftarrow$)
Sejam $a, b \in R$ tq. $ab \in I$.
como $ab \in I$, logo $(I+ab) = (I+a)(I+b) = I$
Logo $(I+a) = I$ ou $(I+b) = I$.
Caso $(I+a) = I$:
Como $(I+a) = I$, logo $a \in I$.
Caso $(I+b) = I$:
similar.
</td>
</tr>
</table>

(42) **E** C+ *Escolha 2 das* **E1**, **E2**, **E3**.

(21) **E1.** Seja $K : F$ extensão finita. Mostre que todo $a \in K$ é algébrico sobre o F.

(21) **E2.** Qualquer ideal de $F[x]$ é principal.

(21) **E3.** Seja c algébrico sobre o F. Demonstre: $[F(c) : F] = \deg(\text{min. poly de } c \text{ sobre } F)$.

DEMONSTRAÇÃO DA R6.

⇒) Seja $a \in R$ tq. $(I+a) \neq I$, ou seja $a \notin I$. $= I + (a)$

Seja $K = \{i + ax \mid i \in I \ \& \ x \in R\}$.

Temos que $K \trianglelefteq R$. [Lemma] ✓

Temos que $a = 0 + a1 \in K$.

Temos todos os membros de I em K na forma $i + a0$, logo $I \subseteq K$. ✓

Como $a \in K$ e $I \subseteq K$, ~~logo K é maior que I~~.

Logo, $K = R$ [I maximal] ✓

Logo, sejam $i \in I$ e $x \in R$ tq. $1 = i + ax$.

Logo, $i = 1 - ax \in I$.

Logo, $I + ax = I + 1$.

Logo, $(I+a)(I+x) = I+1$. ✓

⇐) Seja $I \subsetneq J \trianglelefteq R$. Queremos $J = R$. ✓

Logo, seja $j \in J$ tq. $j \notin I$. ✓

Logo, $(I+j) \neq I$.

Logo, seja $j' \in R$ tq. $(I+j)(I+j') = (I+1)$ [R/I corpo]

Temos $(I+jj') = (I+j)(I+j') = (I+1)$

Logo $1 - jj' \in I$, logo $(1-jj') \in J$ [$I \subsetneq J$]

Como $j \in J$ e $j' \in R$, logo $jj' \in J$ [$J \trianglelefteq R$]

Logo, $(1-jj') + jj' \in J$.

Logo, $1 \in J$.

Logo $J = R$.

DEMONSTRAÇÃO DA ______.

Lemma $K \trianglelefteq R$.

Seja $k_1, k_2 \in K$.

(−)-fechado:

$$k_1 - k_2 = (i_1 + ax_1) - (i_2 + ax_2) = \underbrace{(i_1 - i_2)}_{I} + a\underbrace{(x_1 - x_2)}_{R}$$

(·)-fechado:

$$k_1 \cdot k_2 = (i_1 + ax_1)(i_2 + ax_2) = (\underbrace{i_1 i_2}_{I} + \underbrace{i_1 a x_2}_{\in I} + \underbrace{i_2 a x_1}_{\in I}) + a\underbrace{(a x_1 x_2)}_{R}$$

K absorve X:

Seja $n \in R$ e $k \in K$.

Seja $i \in I$ e $x \in R$ tq. $k = i + ax$

Calculamos:

$nk = n(i + ax)$

$= ni + a(nx)$.

Como $i \in I \trianglelefteq R$, logo $ni \in I$

Logo $nk \in K$.

(16) **Q**

$\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

Dica: Calcule umas potências de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

!!

DEMONSTRAÇÃO.

⊆): Seja $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

⊇): Seja $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

Temos que x tem o formato:

$x = a + \sqrt{2}b + \sqrt{3}c + \sqrt{2}\sqrt{3}d$

Tomando ? $d = 0$, temos que $a + \sqrt{2}b + \sqrt{3}c \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Só isso mesmo.

(42) **R** *Escolha 5 das* **R1**, **R2**, **R3**, **R4**, **R5**, **R6**.

(21) **R1.** Todo homomorfismo entre corpos é injetivo e respeita inversos e frações.
(21) **R2.** Seja D domínio de integridade finito. Demonstre que D é um corpo.
(21) **R3.** Homomorfismos de aneis refletem ideais. ✓
(21) **R4.** Os únicos ideais dum corpo são o 0 e o próprio corpo. ✓
(21) **R5.** Seja I ideal dum anel $\mathcal{R}$. Demonstre: I primo $\iff \mathcal{R}/I$ int.dom.
(21) **R6.** Seja I ideal dum anel $\mathcal{R}$. Demonstre: I maximal $\iff \mathcal{R}/I$ corpo.
(Corolário: I maximal $\implies I$ primo)

DEMONSTRAÇÃO DA R4 .

Seja K corpo. ✓
Seja $I \trianglelefteq K$ ideal non-zero ✓
Logo seja $i \in I$ tq $i \neq 0$ ✓
(Logo seja i^{-1} ?... , como K corpo e $i \in K$)
Como I ideal, logo $I \cdot i^{-1} = I$
Como $i \in I$, logo $i \cdot i^{-1} \in I \cdot i^{-1} = I$
Como $i \cdot i^{-1} = 1$, logo $1 \in I$.
Seja $k \in K$. (Logo $\underset{k}{\underset{\shortparallel}{1 \cdot k}} \in I$) ∎
Logo $I \cdot k = I$
Como $1 \in I$, logo $k \in I \cdot k = I$
Logo $k \in I$
Logo $I = K$ ✓

DEMONSTRAÇÃO DA R3 .

Sejam R, S aneis e $\varphi : R \to S$ homomorfismo
Seja $I \trianglelefteq S$ ideal. ✗ Logo ~~seja~~ $\varphi^{-1}[I] \subseteq R$
Sejam $a, b \in \varphi^{-1}[I]$
Como $\varphi(a) \in I$ e $\varphi(b) \in I$ e I ideal, logo $\varphi(a) + \varphi(b) \in I$
Logo $\varphi(a+b) \in I$, logo $a+b \in \varphi^{-1}[I]$
~~Logo $\varphi^{-1}[I]$~~
no need (Como I ideal, logo $0_S \in I$. Logo $\varphi(0) \in I$. Logo $0 \in \varphi^{-1}[I]$
Logo $\varphi^{-1}[I]$ é subgrupo de R)
Seja $r \in R$.
$\varphi(r) \cdot \varphi(\varphi^{-1}[I]) = \varphi(r) \cdot I$ (def de φ^{-1}) XX
$= I$ (I ideal)
$= I \cdot \varphi(r)$?
$= \varphi(\varphi^{-1}[I])$
Logo $\varphi^{-1}[I] \trianglelefteq R$ ideal.

Em geral,
cuidado: $(f \circ f^{-1})[X] \neq X$
& $(f^{-1} \circ f)[X] \neq X$

Sejam $r \in R$, $j \in \varphi^{-1}[I]$.
$\varphi(r \cdot j) = \underbrace{\underbrace{(\varphi r)}_{\in S} \underbrace{(\varphi j)}_{\in I}}_{\in I}$ ∎

Quais das $(\subseteq)$, $(\supseteq)$ são garantidas, e o que precisa ter para garantir as outras?

(42) **E** *Escolha 2 das* **E1**, **E2**, **E3**.

(21) **E1.** Seja $K : F$ extensão finita. Mostre que todo $a \in K$ é algébrico sobre o F.

(21) **E2.** Qualquer ideal de $F[x]$ é principal.

(21) **E3.** Seja c algébrico sobre o F. Demonstre: $[F(c) : F] = \deg(\text{min. poly de } c \text{ sobre } F)$.

DEMONSTRAÇÃO DA R5.

R5 $\Rightarrow$ Seja I primo

X (Logo seja R/I.)

Sejam $a, b \in R$ (e $I+a, I+b \in R/I$) X

Suponha $(I+a)(I+b) = I$ ✓

(Logo $I^2 + I\cdot a + I\cdot b + a\cdot b = I$)

Logo $I + a\cdot b = I$ ✓

Logo $a\cdot b \in I$ ✓

Logo $a \in I$ ou $b \in I$ ✓

caso $a \in I$: $\Rightarrow$ $I + a = I$

caso $b \in I$: $\Rightarrow$ $I + b = I$

Logo R/I é int. dom ✓

$\Leftarrow$ ~~Seja~~ Sup. R/I int. dom

~~Logo~~ sejam $a, b \in R$ (e $I+a, I+b \in R/I$) X

$\boxed{\text{suponha } a \in I \text{ ou } b \in I}$ $\leftarrow$??

$\hookrightarrow$ $I + a = I$, ~~Logo~~ $(I+b)(I+a) = \boxed{(I+b)I}$ $= I$ $\leftarrow$ necessárias!

Logo $I + ab = I$.

Logo $ab \in I$

Suponha $ab \in I$

Logo $I + ab = I$

Logo $(I+a)(I+b) = I$

Logo $I + a = I$ ou $I + b = I$ (int dom)

$\llcorner$ $a \in I$ $\qquad$ $\llcorner$ $b \in I$ ✓

~~Logo~~

Logo I é primo

DEMONSTRAÇÃO DA E3.

Seja $p(c)$ o min. poly de c sobre F. $\qquad$ $p(x) \in F[x]$

$p(c) \in F(c)$ $\leftarrow$ não é um poly

Logo $p(c) = p_0 + p_1 c^1 + \dots p_n c^n$

? Seja $a(c) \in F(c)$, ou seja, $a(c) = a_0 + a_1 c^1 + \dots + a_m c^m$

$a(x) \in F[x]$?

Div. $a(c)$ por $p(c)$ $\qquad$ Qual é a base?

$a(c) = q(c)p(c) + r(c)$

caso $r(c) = 0$ $\qquad$ caso $r(c)$ $\deg(r(c)) < \deg(p(c))$

$a(c) = q(c)\cancel{p(c)}^0$ $\qquad$ $a(c) = q(c)\cancel{p(c)}^0 + r(c)$

$= 0$ $\qquad$ $= r(c)$

~~Como~~ $\deg(a(c))$ é menor que $\deg(p(c))$ em ambos os casos, logo $a(c)$ tem grau no máximo $\deg(p(c)) - 1$, e portanto tem $\deg(p(c))$ termos.

Logo $[F(c) : F] = \deg(p(c))$

(16) **Q**

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$$

Dica: Calcule umas potências de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

DEMONSTRAÇÃO.

Seja $q \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

Logo $q = a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6} + d$

sejam $x, y, w, z \in \mathbb{Q}$ tq $d = 2xw + 3yz$

e $c = yw + xz$.

Logo $q = a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + (x\sqrt{2} + y\sqrt{3})(w\sqrt{2} + z\sqrt{3})$

Logo $q \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$??

Seja $q \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

X Logo $q = a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$??

Logo $q = a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + 0\sqrt{6} + 0$

Logo $q \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

$\sqrt{2}$

$2 + \sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{3}$

$2\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + \sqrt{6}$

$2\sqrt{3} + 6\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$

Só isso mesmo.

$a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$

$c\sqrt{2} + d\sqrt{3}$

$2ac + bc\sqrt{6} + ad + \sqrt{6} + 3bd$

$c\sqrt{2} + \sqrt{3}$

$\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$

$2c2 +$

$c2 + \sqrt{6} + dc\sqrt{6} + 3d$

$22 + 9\sqrt{6} + 11\sqrt{6} + 27$

$2\sqrt{6} + 5$

$5\sqrt{2} +$

$11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}$

$8\sqrt{2} + 6\sqrt{3} + \sqrt{6} + 3\sqrt{3}$

$2 + 2\sqrt{6} + 3$

$2\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + \sqrt{12} + 2\sqrt{3} + 6\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$

(42) **R** *Escolha 5 das* **R1**, **R2**, **R3**, **R4**, **R5**, **R6**.

(21) **R1.** Todo homomorfismo entre corpos é injetivo e respeita inversos e frações.
(21) **R2.** Seja D domínio de integridade finito. Demonstre que D é um corpo.
(21) **R3.** Homomorfismos de aneis refletem ideais.
(21) **R4.** Os únicos ideais dum corpo são o 0 e o próprio corpo.
(21) **R5.** Seja I ideal dum anel $\mathcal{R}$. Demonstre: I primo $\iff \mathcal{R}/I$ int.dom.
(21) **R6.** Seja I ideal dum anel $\mathcal{R}$. Demonstre: I maximal $\iff \mathcal{R}/I$ corpo.
(Corolário: I maximal $\implies I$ primo)

DEMONSTRAÇÃO DA R2.

Como D é anel, temos

(+) fechado (·) ass
(·) fechado (·) dist. sob +
(+) ass (·) com [Anel comutativo]
(+) com
(+) inv. fec.

off-by-one

falta mostrar que · é fechado pelos inv.

Seja $f = \prod_{i=0}^{i=N} (d_i)$, onde N é o tamanho de D. [D é finito]:
(ou $D \setminus \{0\}$?)

$d_i \in D - \{0\}$ ✓

Como D é fechado, então $f \in D$ ✓

Como todo $d_i \neq 0$ & não temos zero divisors $\in D$ por quê?
$2 \cdot 3 = 0$ no $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

então $f \neq 0$ e f é algum $d_i \in D$

ou seja, $\overset{?}{\prod}(d_0, d_1, \ldots d_{q-1}, d_{i+1}, \ldots, d_n) = 1$

ou seja todos os ds se cancelam, todo tem inverso.

cuidado: canc $\not\Rightarrow$ inv

DEMONSTRAÇÃO DA ________.

(42) **E**

Escolha 2 das **E1**, **E2**, **E3**.

(21) **E1.** Seja $K : F$ extensão finita. Mostre que todo $a \in K$ é algébrico sobre o F.

(21) **E2.** Qualquer ideal de $F[x]$ é principal.

(21) **E3.** Seja c algébrico sobre o F. Demonstre: $[F(c) : F] = \deg(\text{min. poly de } c \text{ sobre } F)$.

DEMONSTRAÇÃO DA ______ .

DEMONSTRAÇÃO DA ______ .

(16) **Q**

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

Dica: Calcule umas potências de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

por quê?

DEMONSTRAÇÃO. !

Seja $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

temos $x = a + b(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ X

$= a + b\sqrt{2} + b\sqrt{3}$

onde $a, b \in \mathbb{Q}$

Seja $y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

$y = d(a + b\sqrt{2}) + c\sqrt{3}$ $\left|\begin{array}{l} a,b \in \mathbb{Q} \\ c,d \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \end{array}\right.$

?

Tome, $d = 1$ e $c = b$

$d(a+b\sqrt{2}) + c\sqrt{3} = a + b\sqrt{2} + b\sqrt{3}$

$= a + b(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

$= x$

Logo, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Porém

$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ e $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$, logo $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) \not\subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

Só isso mesmo.

(42) **R** *Escolha* ~~3~~ 2 *das* **R1**, **R2**, **R3**, **R4**, **R5**, **R6**.

(21) **R1.** Todo homomorfismo entre corpos é injetivo e respeita inversos e frações.
(21) **R2.** Seja D domínio de integridade finito. Demonstre que D é um corpo.
(21) **R3.** Homomorfismos de aneis refletem ideais.
(21) **R4.** Os únicos ideais dum corpo são o 0 e o próprio corpo.
(21) **R5.** Seja I ideal dum anel $\mathcal{R}$. Demonstre: I primo $\iff$ $\mathcal{R}/I$ int.dom. R comutativo
(21) **R6.** Seja I ideal dum anel $\mathcal{R}$. Demonstre: I maximal $\iff$ $\mathcal{R}/I$ corpo.
(Corolário: I maximal $\implies$ I primo)

DEMONSTRAÇÃO DA R4.

Seja I ideal de um corpo F t.q $I \neq \{0\}$. Seja $a \in I$ t.q $a \neq 0$ e a' seu inverso. Logo $aa' = 1 \in I$, pois I absorve pela multiplicação. Como $1 \in I$, então $I = F$ pois para qualquer $x \in F$, $x = x \cdot 1 \in I$ pois I absorve pela multiplicação.

Logo $I = \{0\}$ ou $I = F$. □

DEMONSTRAÇÃO DA R5.

=>) Sejam $(I+a), (I+b) \in R/I$ t.q $(I+a)(I+b) = I$. Logo, como $(I+ab) = I$, então $ab \in I$. Como I é primo então $a \in I$ ou $b \in I$.
Caso $a \in I$: Temos pelo [Lemma 1] que $I + a = I$.
Caso $b \in I$: Similar.
(<=)
Sejam $a, b \in R$ t.q $ab \in I$. Logo $I + ab = (I+a)(I+b) = I$ [Lemma 1]
Como R/I é int.dom então $(I+a) = I$ ou $(I+b) = I$. Caso $I + a = I$ então $a \in I$. [Lemma 1]. Caso $I + b = I$ é similar.

[Lemma 1]
$I + a = I \iff a \in I$

(=>)
$0 \in I$
$0 + a \in I + a = I$
$a \in I$

(<=) $I + a \subset I$ pois I é (+) fechado
Seja $i \in I$ temos $i = (i-a) + a$.
Como $i - a \in I$ então $i \in I + a$ □

(42) **E** $\mathbb{Q} : \mathbb{R}$ *Escolha 2 das* **E1**, **E2**, **E3**.

artigo definido?

(21) **E1.** Seja $K : F$ extensão finita. Mostre que todo $a \in K$ é algébrico sobre o F.

(21) **E2.** Qualquer ideal de $F[x]$ é principal.

(21) **E3.** Seja c algébrico sobre o F. Demonstre: $[F(c) : F] = \deg(\text{min. poly de } c \text{ sobre } F)$.

DEMONSTRAÇÃO DA E2 .

Seja $I \trianglelefteq F[x]$. Caso $I = \{0\}$ então $I = \langle 0 \rangle$. Caso contrário seja $P(x) \in$ um Polinômio ñ zero de menor grau em I. Vou demonstrar que $I = \langle P(x) \rangle$.

$\langle P(x) \rangle \subseteq I$

Seja um arbitrário $q(x)P(x)$. ?? temos que $P(x) \in I$, logo $q(x)P(x) \in I$ pela absorção do I.

$I \subseteq \langle P(x) \rangle$

Seja $a(x) \in I$, como $P(x) \neq 0$ temos $a(x) = P(x) \cdot q(x) + r(x)$ onde $r(x) = 0$ ou $\deg(r(x)) < \deg(P(x))$. Caso $r(x) = 0$ é trivial. Caso contrário temos $r(x) = a(x) - P(x)q(x) \in I$. O que não é verdade pois $P(x)$ é o Polinômio de menor grau em I.

DEMONSTRAÇÃO DA R3 .

exagerou!

Seja $\varphi : R \to S$ e $J \trianglelefteq S$.

$\varphi^{-1}[J] \trianglelefteq R$

(+)-Fechado

Seja a, b t.q $\varphi(a), \varphi(b) \in J$

Logo $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) \in J$.

0-Fechado

$\varphi(0) = 0 \in J$

(−)-Fechado

Similar a (+)-fechado

$\varphi^{-1}[J]$ absorve.

Sejam $a, b \in R$ s.q $\varphi(a) \in J$.

Temos $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \in J$ pois J absorve. Logo $ab \in \varphi^{-1}[J]$ □

Similar para $ba \in \varphi^{-1}[J]$ □

(16) **Q**

$\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

$11\sqrt{2} + 9\sqrt{3} - (\ldots) = 2\sqrt{2}$

Dica: Calcule umas potências de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

$2\sqrt{2} + 3 \cdot 2\sqrt{3} + 3 \cdot \sqrt{2} \cdot 3 + 3\sqrt{3}$

DEMONSTRAÇÃO.

$\subseteq$ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ é construído a partir de $\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ pelas ops de corpo. Logo todo $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ pertence a $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

ficou meio

$\supseteq$ $\sqrt{2} = \dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3 - 9(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2}$

$\sqrt{3} = \dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3 - 11(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{-2}$

Como $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ são construídos a partir de $\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}+\sqrt{3}\}$ então $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

Só isso mesmo.

(42) **R** *Escolha ~~5~~ 2 das* **R1**, **R2**, **R3**, **R4**, **R5**, **R6**.

(21) **R1.** Todo homomorfismo entre corpos é injetivo e respeita inversos e frações.

(21) **R2.** Seja D domínio de integridade finito. Demonstre que D é um corpo.

(21) **R3.** Homomorfismos de aneis refletem ideais. $\varphi : R \to S$

(21) **R4.** Os únicos ideais dum corpo são o 0 e o próprio corpo. $\varphi[J]$

(21) **R5.** Seja I ideal dum anel $\mathcal{R}$. Demonstre: I primo $\iff$ $\mathcal{R}/I$ int.dom.

(21) **R6.** Seja I ideal dum anel $\mathcal{R}$. Demonstre: I maximal $\iff$ $\mathcal{R}/I$ corpo.

(Corolário: I maximal $\implies$ I primo) Comutativo

Comutativos

Demonstração da R3.

Sejam $J \trianglelefteq S$, $\varphi : R \to S$

(hab): Temos $\varphi\, 0_R = 0_S$. Temos $0_S \in J$ $[J \trianglelefteq S]$.

((+)-cl):

Sejam (x, y ∈ R t.q.) $\varphi x, \varphi y \in J$.

Temos $\varphi(x +_R y) = (\varphi x) +_S (\varphi y)$ [φ homo]

Logo $\varphi(x +_R y) \in J$. [J (+)-cl].

(Absorve (·)):

Sejam $r \in R$ e $\varphi x \in J$.

Temos $\varphi r \in S$.

Temos $(\varphi r)(\varphi x) \in J$. $[J \trianglelefteq S]$

Logo $\varphi(rx) \in J$. [φ homo]. ∎

Demonstração da R5.

($\Rightarrow$):

Sejam $(I+a)(I+b) = I$. ?

Temos $(I+a)(I+b) = I + ab$. [(·)]

(Como $0 \in I$) logo $ab \in I$. ([$0 + ab \in I$])

Logo $a \in I$ ou $b \in I$. [escolha I]

Caso $a \in I$:

Temos $I + a = I$ [♡]

Caso $b \in I$: Similar.

($\Leftarrow$):

Sejam $ab \in I$.

Logo $I + ab = I$. [♡]

Logo $(I+a)(I+b) = I$. [(·)]

Caso $I + a = I$: [hyp.]

temos $a \in I$.

Caso $I + b = I$:

Temos $b \in I$. ∎

(42) **E** *Escolha 2 das* **E1**, **E2**, **E3**.

(21) **E1.** Seja $K : F$ extensão finita. Mostre que todo $a \in K$ é algébrico sobre o F.
(21) **E2.** Qualquer ideal de $F[x]$ é principal.
(21) **E3.** Seja c algébrico sobre o F. Demonstre: $[F(c) : F] = \deg(\text{min. poly de } c \text{ sobre } F)$.

DEMONSTRAÇÃO DA E1.

X

Seja $a \in K$.
Seja $n = [K : F]$.
Seja $p(x)$ uma base no K com n independentes membros.

poly set

DEMONSTRAÇÃO DA E2.

Seja $J \trianglelefteq F[x]$
Caso $J = \{0\}$:
Temos $J = \langle 0 \rangle$.
Caso $J \neq \{0\}$:
Seja $b(x) \in J$ um poly de menor grau. [PBO nos deg]
$\vdash J = \langle b(x) \rangle$
($\supseteq$):
Seja $p(x) \in F[x]$.
Como $b(x) \in J$ logo $p(x)b(x) \in J$. [escolha do J]
($\subseteq$):
Seja $p(x) \in J$.

Sejam $p(x) = q(x)b(x) + r(x)$ & q
$r(x) = 0$ ou $\deg(r(x)) < \deg(b(x))$. [Euclid] ✓
Caso $r(x) = 0$:
Temos $p(x) = q(x)b(x) \in J$. [escolha J] ✓
Caso $\deg(r(x)) < \deg(b(x))$
Temos $q(x)b(x) \in J$. [escolha J]
Logo $p(x) - q(x)b(x) = r(x) \in J$. [escolha J]
Contradição pela a escolha de $b(x)$. ∎ Como?

não ajuda

(16) **Q**

$\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

Dica: Calcule umas potências de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Oi, eu do futuro. (oi)

DEMONSTRAÇÃO.

($\supseteq$):
Sejam $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ X
Temos $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{6} + 0\sqrt{6} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.
?!
($\subseteq$):
Sejam $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

X

Só isso mesmo.

(42) **R** *Escolha* ~~1~~ 2 *das* **R1**, **R2**, **R3**, **R4**, **R5**, **R6**.

(21) **R1.** Todo homomorfismo entre corpos é injetivo e respeita inversos e frações.
(21) **R2.** Seja D domínio de integridade finito. Demonstre que D é um corpo.
(21) **R3.** Homomorfismos de aneis refletem ideais. $\{0\}$
(21) **R4.** Os únicos ideais dum corpo são o $\{0\}$ e o próprio corpo. + - $(\forall d \in D)(\forall a \in F)[da \in D$ e $ad \in D]$
(21) **R5.** Seja I ideal dum anel $\mathcal{R}$. Demonstre: I primo $\iff$ $\mathcal{R}/I$ int.dom.
(21) **R6.** Seja I ideal dum anel $\mathcal{R}$. Demonstre: I maximal $\iff$ $\mathcal{R}/I$ corpo.
(Corolário: I maximal $\implies$ I primo)

coclasses de I
$I+a$ tq $a \in R$

DEMONSTRAÇÃO DA R2.

Basta mostrar que $(\forall a \neq 0)(\exists x \in D)[a \cdot x = 1]$
Seja $a \in D$ tq $a \neq 0$.
Considere a seguinte lista dos elementos de $D = a_0, \dots, a_n$
temos $a \cdot a_0, \dots, a \cdot a_n$ possui n distintos elementos, pois D domínio de integridade e $a \neq 0$, logo $a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y$ e logo $x \neq y \Rightarrow ax \neq ay$.
Logo os $a \cdot a_0, \dots, a \cdot a_n$ são todos os elementos de D e como $1 \in D$, logo
$1 \in \{a \cdot a_0, \dots, a \cdot a_n\}$.
Seja $i \in \bar{n}$ tq $a \cdot a_i = 1$, logo a_i é o inverso de a que queríamos mostrar.

apenas! O $(\Leftarrow)$ é imediato para qualquer ideal

DEMONSTRAÇÃO DA R5.

$(\Rightarrow)$ ~~Suponha I primo, ou seja, $ab \in I \iff a \in I$ ou $b \in I$.~~
~~Vou mostrar $(\forall a,b \in R)[(I+a)(I+b) = I \Rightarrow (I+a) = I$ ou $(I+b) = I]$~~
~~"Sejam $I+a, I+b \in R/I$" tq $(I+a)(I+b) = I$.~~
~~Logo $I+ab = I$, logo $ab \in I$.~~
~~Como $ab \in I$ e I primo, logo $a \in I$ ou $b \in I$~~
~~Caso $a \in I$:~~
~~Logo $I+a = I$.~~
~~Caso $b \in I$~~
~~Logo $I+b = I$.~~

$(\Leftarrow)$ Seja R/I int. Dom. Ou seja, $(\forall a,b)[(I+a)(I+b) = I \Rightarrow (I+a) = I$ ou $(I+b) = I]$
Quero $(\forall a b)[ab \in I \iff a \in I$ ou $b \in I]$.
$(\Rightarrow)$ Sejam $a, b \in R$ tq $ab \in I$. Logo $I+ab = I$.
Logo $(I+a)(I+b) = I$. Logo $I+a = I$ ou $I+b = I$. (Int Dom)
Caso $I+a = I$: Logo $a \in I$.
Caso $I+b = I$: similar
$(\Leftarrow)$ Suponha $a \in I$ ou $b \in I$.
Caso $a \in I$: Logo $ab \in I$, pois I ideal.
Caso $b \in I$: similar

X

$=0$

$\frac{(I+0)+(I+a) = (I+a)}{I}$

$(I+a)+(I+b) = I+(a+b)$
$(I+a)\cdot(I+b) = I+(ab)$

$I+0 \neq I \iff a \in I$

$I+$
$I+a = I \iff a \in I$

$a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$

$0 \leq \deg r(x) < \deg b(x)$

$b(x)$

$(I+a)(I$

$(I+1)\cdot(I+a)$

$I+a$

(42) **E**

artigo definido??

Escolha 2 das **E1**, **E2**, **E3**.

(21) **E1.** Seja $K : F$ extensão finita. Mostre que todo $a \in K$ é algébrico sobre o F.

(21) **E2.** Qualquer ideal de $F[x]$ é principal.

(21) **E3.** Seja c algébrico sobre o F. Demonstre: $[F(c) : F] = \deg(\text{min. poly de } c \text{ sobre } F)$.

DEMONSTRAÇÃO DA E2.

Seja I ideal de $F[x]$. Quero $p(x)$ tq $I = \langle p(x) \rangle$, ou seja, tq I ...
Seja $b(x)$ o polinomio de menor grau em I. ~
Vou mostrar que $I = \langle b(x) \rangle$
Seja $a(x) \in I$. Sejam $q(x), r(x)$ tq $a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$ e
tq $\deg(r(x)) < \deg(b(x))$ ou $r(x) = 0$.
CASO...: temos $r(x) = a(x) - b(x) \cdot q(x)$. Como $b(x) \in I$ e I ideal, logo
$b(x) q(x) \in I$, Como $a(x) \in I$, logo $a(x) - b(x) q(x) \in I$, ou seja
$r(x) \in I$.
temos então $r(x) \in I$ e $\deg(r(x)) < \deg(b(x))$ ou $r(x) = 0$, mas $b(x)$ é o polinomio
de menor grau em I, logo $r(x) = 0$ e logo $a(x) = b(x) q(x)$.

DEMONSTRAÇÃO DA R4.

Seja F um corpo.
Seja J um ideal em F tq $J \neq \{0\}$ e $J \neq F$.
Seja $j \in J$ tq $j \neq 0$.
Seja $x \in F$ tq $x \notin J$.
Como J ideal, logo $jj^{-1} \in J$.
Como $jj^{-1} \in J$, logo $(jj^{-1})x \in J$. Logo $1x \in J$ e logo $x \in J$, contradizendo assim a hipotese que $x \notin J$.

Vamo ser menos negativos na vida :)

(16) **Q**

$\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

Dica: Calcule umas potências de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

DEMONSTRAÇÃO.

Só isso mesmo.

(42) **R** *Escolha* ~~5~~ 2 *das* **R1, R2, R3, R4, R5, R6.**

(21) **R1.** Todo homomorfismo entre corpos é injetivo e respeita inversos e frações.
(21) **R2.** Seja D domínio de integridade finito. Demonstre que D é um corpo.
(21) **R3.** Homomorfismos de aneis refletem ideais.
(21) **R4.** Os únicos ideais dum corpo são o $\{0\}$ e o próprio corpo.
(21) **R5.** Seja I ideal dum anel $\mathcal{R}$. Demonstre: I primo $\iff$ $\mathcal{R}/I$ int.dom.
(21) **R6.** Seja I ideal dum anel $\mathcal{R}$. Demonstre: I maximal $\iff$ $\mathcal{R}/I$ corpo.
(Corolário: I maximal $\implies$ I primo)

Demonstração da R5.

($\Rightarrow$):

Suponha I primo. ✓
Sejam $a, b \in R$. ✓
Suponha $(I+a)\cdot(I+b) = I$ ✓
Logo, $I + ab = I$. ✓
Logo, $ab \in I$. ✓
Logo $a \in I$ ou $b \in I$. [I primo] ✓
∎

($\Leftarrow$):

Suponha R/I int. dom.
Sejam $a, b \in R$.
Suponha $ab \in I$. Logo $I + ab = I$. Logo $(I+a)(I+b) = I$ ... !
Logo, $I+a = I$ ou $I+b = I$. [R/I int. dom.]
Logo, $a \in I$ ou $b \in I$.
∎

Demonstração da R4.

Seja I um ideal de um corpo F.
Caso $I = \{0\}$: ∎
Caso $I \neq \{0\}$: ✓
Logo, seja $a \in I$, tal que $a \neq 0$. ✓
Logo, $a^{-1} I = I$. ✓
Logo, $a^{-1} a \in I$. ✓
Logo, $1 \in I$. ✓
Logo, $I = F$. (lemma legal)
∎ ✓

Lemma legal: Seja F um corpo. Seja I um ideal de F.
$\vdash 1 \in I \Rightarrow I = F$.
Suponha $1 \in I$.
Vou demonstrar $I \subseteq F$ e I, ${}^{-1}$-fechado.
Temos I $+$-fechado e $1 \in I$.
Logo, sejam $a, b \in I$.
Logo, $aI = I$.
Logo, $ab \in I$. $(1 \in I)$.
Similarmente $a^{-1} \in I$.

Vou demonstrar $|I| = |F|$.
Seja $c \in F$.
Logo, $cI = I$.
Logo, $c \in I$.
$(1 \in I)$.
∎

Complicou demais!

$$\frac{f \in F \qquad 1 \in I}{\underset{\substack{\| \\ f}}{1 \cdot f} \in I}\; I \trianglelefteq F$$

acabou.

(42) **E** *Escolha 2 das* **E1**, **E2**, **E3**.

(21) **E1.** Seja $K : F$ extensão finita. Mostre que todo $a \in K$ é algébrico sobre o F.

(21) **E2.** Qualquer ideal de $F[x]$ é principal.

(21) **E3.** Seja c algébrico sobre o F. Demonstre: $[F(c) : F] = \deg(\text{min. poly de } c \text{ sobre } F)$.

Demonstração da E1.

Logo, seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $[K:F] = m$.

Considere o conjunto $\{1, a, a^2, \dots, a^m\}$ com $m+1$ membros.

Nota-se que é ? dependente. $[[K:F]=m]$.

Logo, sejam $c_0, c_1, \dots, c_m$ tais que $c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \dots + c_m a^m = 0$.

∎

Demonstração da E2.

Seja $I[x]$ um ideal de $F[x]$.

Seja $p(x)$ o polinômio de menor grau em $I[x]$. (PBO).

Seja $a(x) \in I[x]$.

Logo, sejam $q(x), r(x) \in I$ tais que $a(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x)$. (Euc div).

Caso $\deg(r(x)) = 0$: ∎

Caso $\deg(r(x)) < \deg(p(x))$:

Contradição pela escolha de $p(x)$.

∎

(16) **Q**

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$$

Dica: Calcule umas potências de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Demonstração.

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$: $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ é $+-$fechado. ∎	$\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$: Logo, $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. Logo, $(2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+3)(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. Logo, $11\sqrt{2}+9\sqrt{3} = 2\sqrt{2}+(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \cdot 9 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

Logo, $(2\sqrt{2}+9(\sqrt{2}+\sqrt{3})) - (9(\sqrt{2}+\sqrt{3})) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. Só isso mesmo.

Logo, $2\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$, ou seja $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

Logo, $(11\sqrt{2}+9\sqrt{3}) - (11\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

Logo, $9\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$, logo $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$.

∎