
Nome:

Θάυος

2024-04-17

Regras:

- I. Não vires esta página antes do começo da prova.
- II. Nenhuma consulta de qualquer forma.
- III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).¹
- IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma.
- V. $(\forall x) [\text{Colar}(x) \implies \neg \text{Passar}(x)]$.²
- VI. Responda dentro das caixas indicadas.
- VII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

Boas provas!

¹Ou seja, *desligue antes* da prova.

²Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

(16) **A**

(8) **A1.** Defina o que é uma ação de um grupo \mathcal{G} num objeto X numa categoria \mathcal{C} .
DEFINIÇÃO.

Sejam \mathcal{G} grupo, \mathcal{C} cat, X objeto de \mathcal{C} .
Chamamos de ação do \mathcal{G} no X qualquer Group-homomorfismo
 $\sigma : \mathcal{G} \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$.

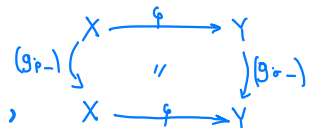
(8) **A2.** Tendo uma ação ρ dum grupo \mathcal{G} em cima dum conjunto X , chamamos o $(X; \rho)$ de \mathcal{G} -set.
Como definirias a categoria cujos objetos são os \mathcal{G} -sets?

DEFINIÇÃO. (Basta definir as setas.)

As setas no $\text{Hom}(X; \rho), (Y; \sigma)$ são as funções $\varphi : X \rightarrow Y$ que
comutam com "todas as multiplicações da ação", i.e.,

$(\forall g \in \mathcal{G}) [\varphi(g \cdot x) = g \cdot (\varphi x)]$, ou seja:

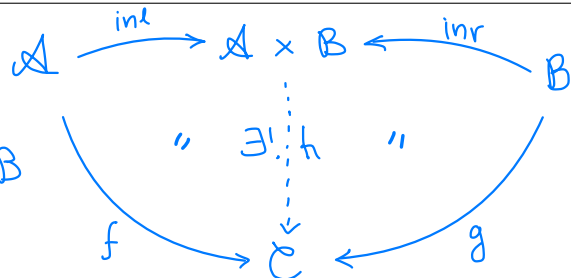
para todo $g \in \mathcal{G}$,



(24) **S**

Enuncie o que significa que na categoria **Abel** o $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ é o coproduto dos \mathcal{A}, \mathcal{B} , e demonstre.
RESPOSTA.

$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ junto com homomorfismos
 inl, inr é o coproduto da **Abel**
sse para quaisquer $\mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{C} \xleftarrow{g} \mathcal{B}$
existe único homo $h : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$
que faz o diagrama comutar.



Sejam $\text{inl } a \stackrel{\text{def}}{=} (a, 0_B)$ $\text{inr } b \stackrel{\text{def}}{=} (0_A, b)$.

Sejam $\mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{C} \xleftarrow{g} \mathcal{B}$.

Defina $h : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ pela

$h(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} fa + gb$.

h é um homo.

$$\begin{aligned} h((a, b) + (a', b')) & \quad = fa + fa' + gb + gb' \\ = h(a+a', b+b') & \quad = (fa+gb) + (fa'+gb') \\ = f(a+a') + g(b+b') & \quad = h(a, b) + h(a', b') \end{aligned}$$

Unicidade: Seja $h' : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$
tq. o diagrama comuta. Logo:

$$\begin{aligned} h'(a, b) & = h'((a, 0_B) + (0_A, b)) \\ & = h'(a, 0_B) + h'(0_A, b) \\ & = h'(\text{inl } a) + h'(\text{inr } b) \\ & = (h' \circ \text{inl})a + (h' \circ \text{inr})b \\ & = fa + gb \\ & = h(a, b) \end{aligned}$$

(24) C

Para qualquer categoria \mathcal{C} e qualquer objeto X de \mathcal{C} ...

(12) C1. ... \mathcal{C}/X tem terminal.

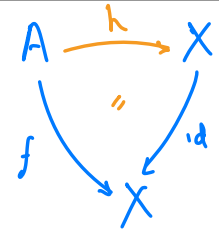
DEMONSTRAÇÃO/REFUTACÃO.

Sejam \mathcal{C} cat e X objeto dela.

Vou mostrar que $(X \xrightarrow{id})$ é terminal de \mathcal{C}/X .

Seja $(A \xrightarrow{f})$ objeto de \mathcal{C}/X .

Basta achar $A \xrightarrow{h} X$ na \mathcal{C} que faz o diagrama comutar.



Existência: A própria $A \xrightarrow{f} X$ serve, pois $f = id \circ f$.

Unicidade: Seja $h: A \rightarrow X$ tq. $id \circ h = f$. Logo $h = f$.

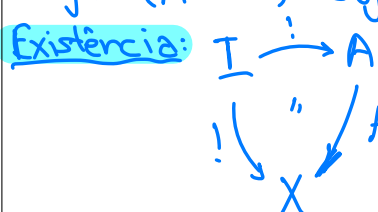
(12) C2. ... se \mathcal{C} tem inicial então \mathcal{C}/X tem inicial.

DEMONSTRAÇÃO/REFUTACÃO.

Seja I inicial de \mathcal{C} .

Vou mostrar que $(I \xrightarrow{!})$ é inicial de \mathcal{C}/X .

Seja $(A \xrightarrow{f})$ objeto de \mathcal{C}/X .



Existência: $I \xrightarrow{!} A$ **Unicidade:** Segue pela unicidade de $I \xrightarrow{!} A$ na \mathcal{C} , que temos pela escolha de I .

(12) F

Enuncie e demonstre: funtores preservam isos.

RESPOSTA.

Sejam $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$, $A \xrightarrow{f} B \in \mathcal{C}_2$ Logo Ff iso (em \mathcal{D})

Basta mostrar que $F(f^{-1})$ é inversa de Ff :

$$\begin{aligned} Ff \circ F(f^{-1}) &= F(f \circ f^{-1}) \quad [F \text{ functor. resp-}(\circ)] \\ &= F(1_B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 1_{FB} \quad [F \text{ functor. resp-id}] \\ F(f^{-1}) \circ Ff &\stackrel{!!!}{=} 1_{FA} \end{aligned}$$

(24) **B**

O aluno Cofelipe alegou que o semilattice livremente gerado pelo X é o conjunto $\wp_{\text{cof}}X$ de todos os subconjuntos *cofinitos* de X , i.e., os conjuntos C tais que $X \setminus C$ é finito.

(8) **B1.** Escreva tudo que foi deixado implícito ou omitido por Cofelipe para que sua afirmação seja considerável.

RESPOSTA.

O semilattice de Cofelipe: $\mathcal{C} = (\wp_{\text{cof}}X; \cap, X)$
O embutimento: $x \mapsto X \setminus \{x\}$

(8) **B2.** Enuncie o que precisa ser demonstrado para confirmar a alegação de Cofelipe.

RESPOSTA.

Dado qualquer semilattice $\mathcal{L} = (\mathcal{L}; *, u)$ e embutimento $X \xrightarrow{f} |\mathcal{L}|$ existe único homo $\bar{f}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{L}$ t.q. o diagrama

X	$\xrightarrow{\eta'}$	$ \mathcal{C} $		\mathcal{C}
		$\vdots \bar{f}$		$\exists!$
$\forall f$	\curvearrowright	$ \mathcal{L} $		\mathcal{L}

Set **Semilattice**

(8) **B3.** Defina todos os isomorfismos possíveis entre o modelo $\wp_{\text{cof}}X$ de Cofelipe e o modelo que discutimos na aula:

$$\mathbb{F} = (\wp_{\text{cof}}X; \cup \emptyset, ?), \quad x \mapsto \eta \rightarrow \begin{matrix} ? \\ \{x\} \end{matrix}$$

Justifique teu “todos” em uma linha só.

RESPOSTA.

Sendo definido por uma UMP*, o free model é único a menos de isomorfismos únicos. Aqui tal único isomorfismo: $(X \setminus _)$:

$A \xrightarrow{t} X \setminus A$	Ele é um homo e	$(X \setminus _)$ é seu inverso:
Ele é bem definido pois complemento de cofinito é finito, e vice versa.	$t(A \cap B) = X \setminus (A \cap B)$	$X \setminus (tA) = X \setminus (X \setminus A) = A$
	$= (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$	$t(X \setminus A) = X \setminus (X \setminus A) = A$
	$= (tA) \cup (tB)$	
	$tX = X \setminus X = \emptyset$	

* Universal Mapping Property

Só isso mesmo.

RASCUNHO