Estruturas Algébricas, 2024.1
(Turma T34 do Thanos)

Prova 1.1
(points: 100; bonus: $0^\flat$; time: 90')

Nome: Θάνος

2024-04-17

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x)\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas.

VII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

(16) **A**

(8) **A1.** Defina o que é uma ação de um grupo $\mathcal{G}$ num objeto X duma categoria $\mathbb{C}$.
DEFINIÇÃO.

Sejam $\mathcal{G}$ grupo, $\mathbb{C}$ cat, X objeto da $\mathbb{C}$.
Chamamos de ação do $\mathcal{G}$ no X qualquer Group-homomorfismo
$\sigma : \mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(X)$.

(8) **A2.** Tendo uma ação ρ dum grupo $\mathcal{G}$ em cima dum conjunto X, chamamos o $(X;\rho)$ de $\mathcal{G}$-set. Como definarias a categoria cujos objetos são os $\mathcal{G}$-sets?
DEFINIÇÃO. (Basta definir as setas.)

As setas no $\mathrm{Hom}((X;\rho),(Y;\sigma))$ são as funções $\varphi : X \to Y$ que comutam com "todas as multiplicações da ação", i.e.,
$(\forall g \in \mathcal{G})[\,\varphi(g \cdot_\rho x) = g \cdot_\sigma (\varphi x)\,]$, ou seja:
para todo $g \in \mathcal{G}$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "(g\cdot_\rho -)"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Y \arrow[d, "(g\cdot_\sigma -)"] \\ X \arrow[r, "\varphi"'] & Y \end{tikzcd}$$

(24) **S**

Enuncie o que significa que na categoria **Abel** o $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ é o coproduto dos $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, e demonstre.
RESPOSTA.

$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ junto com homomorfismos inl, inr é o coproduto da Abel sse para quaisquer $\mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{C} \xleftarrow{g} \mathcal{B}$ existe único homo $h : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ que faz o diagrama comutar.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\mathrm{inl}"] \arrow[dr, bend right, "f"'] & \mathcal{A} \times \mathcal{B} \arrow[d, dashed, "\exists! h"] & \mathcal{B} \arrow[l, "\mathrm{inr}"'] \arrow[dl, bend left, "g"] \\ & \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

Sejam $\mathrm{inl}\, a \overset{\text{def}}{=} (a, 0_{\mathcal{B}})$ $\quad \mathrm{inr}\, b \overset{\text{def}}{=} (0_{\mathcal{A}}, b)$.
Sejam $\mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{C} \xleftarrow{g} \mathcal{B}$.
Defina $h : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ pela

$$h(a,b) \overset{\text{def}}{=} fa + gb.$$

h é um homo:

$h((a,b) + (a',b'))$
$= h(a+a', b+b')$
$= f(a+a') + g(b+b')$
$= fa + fa' + gb + gb'$
$= (fa + gb) + (fa' + gb')$
$= h(a,b) + h(a',b')$

Unicidade: Seja $h' : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ tq. o diagrama comuta. Logo:

$$\begin{aligned} h'(a,b) &= h'((a,0_{\mathcal{B}}) + (0_{\mathcal{A}},b)) \\ &= h'(a,0_{\mathcal{B}}) + h'(0_{\mathcal{A}},b) \\ &= h'(\mathrm{inl}\, a) + h'(\mathrm{inr}\, b) \\ &= (h' \circ \mathrm{inl})a + (h' \circ \mathrm{inr})b \\ &= fa + gb \\ &= h(a,b) \end{aligned}$$

(24) **C**

Para qualquer categoria $\mathbb{C}$ e qualquer objeto X da $\mathbb{C}$...

(12) **C1.** ...$\mathbb{C}/X$ tem terminal.
DEMONSTRAÇÃO/~~REFUTAÇÃO~~.

Sejam $\mathbb{C}$ cat e X objeto dela.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & \arrow[d, phantom, "="] & X \arrow[dl, "id"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Vou mostrar que $(X \xrightarrow{id})$ é terminal da $\mathbb{C}/X$.
Seja $(A \xrightarrow{f})$ objeto da $\mathbb{C}/X$.
Basta achar $A \xrightarrow{h} X$ na $\mathbb{C}$ que faz o diagrama comutar.
Existência: A própria $A \xrightarrow{f} X$ serve, pois $f = id \circ f$.
Unicidade: Seja $h : A \to X$ t.q. $id \circ h = f$. Logo $h = f$.

(12) **C2.** ...se $\mathbb{C}$ tem inicial então $\mathbb{C}/X$ tem inicial.
DEMONSTRAÇÃO/~~REFUTAÇÃO~~.

Seja I inicial da $\mathbb{C}$.
Vou mostrar que $(I \xrightarrow{!})$ é inicial da $\mathbb{C}/X$.
Seja $(A \xrightarrow{f})$ objeto da $\mathbb{C}/X$.
Existência:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, "!"] \arrow[dr, "!"'] & \arrow[d, phantom, "="] & A \arrow[dl, "f"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Unicidade: segue pela unicidade da $I \xrightarrow{!} A$ na $\mathbb{C}$, que temos pela escolha de I.

(12) **F**

Enuncie e demonstre: functores preservam isos.
RESPOSTA.

Sejam $\mathbb{C} \xrightarrow{F} \mathbb{D}$, $A \xrightarrow[f]{\cong} B \in \mathbb{C}_1$. Logo Ff iso (em $\mathbb{D}$)
Basta mostrar que $F(f^{-1})$ é inversa da Ff:

$$\begin{aligned} Ff \circ F(f^{-1}) &= F(f \circ f^{-1}) && [F \text{ functor. resp-}(\circ)] \\ &= F(1_B) \\ &= 1_{FB} && [F \text{ functor. resp-id}] \end{aligned}$$

$$F(f^{-1}) \circ Ff \overset{\dots}{=} 1_{FA}$$

(24) **B**

O aluno Cofelipe alegou que o semilattice livremente gerado pelo X é o conjunto $\wp_{\mathsf{cof}} X$ de todos os subconjuntos *cofinitos* de X, i.e., os conjuntos C tais que $X \setminus C$ é finito.

(8) **B1.** Escreva tudo que foi deixado implícito ou omitido por Cofelipe para que sua afirmação seja considerável.
RESPOSTA.

O Semilattice de Cofelipe: $\mathcal{C} = (\wp_{\mathsf{cof}} X ; \cap, X)$

O embutimento: $x \overset{\eta'}{\longmapsto} X \setminus \{x\}$

(8) **B2.** Enuncie o que precisa ser demonstrado para confirmar a alegação de Cofelipe.
RESPOSTA.

Dado qualquer semilattice $\mathcal{L} = (L; *, u)$ e embutimento $X \xrightarrow[f]{} |\mathcal{L}|$ existe único homo $\bar{f} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{L}$ t.q. o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta'"] \arrow[dr, bend right, "\forall f"'] & {|\mathcal{C}|} \arrow[d, dotted, "|\bar{f}|"] \\ & {|\mathcal{L}|} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, dotted, "\exists! \; \bar{f}"] \\ \forall \mathcal{L} \end{tikzcd}$$

Set **Semilattice**

(8) **B3.** Defina todos os isomorfismos possíveis entre o modelo $\wp_{\mathsf{cof}} X$ de Cofelipe e o modelo que discutimos na aula:

$$\mathbb{F} = (\wp_{\mathsf{f}} X; \underset{\cup}{?}, \underset{\emptyset}{?}), \qquad x \overset{\eta}{\longmapsto} \underset{\{x\}}{?}.$$

Justifique teu "todos" em uma linha só.
RESPOSTA.

Sendo definido por uma UMP*, o free model é único a menos de isomorfismos <u>únicos</u>. Aqui tal único isomorfismo: $(X \setminus \_)$:

$A \overset{t}{\longmapsto} X \setminus A$.

Ele é bem definido pois complemento de cofinito é finito, e vice versa.

Ele é um homo e $(X \setminus \_)$ é seu inverso:

$t(A \cap B) = X \setminus (A \cap B)$
$= (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$
$= (tA) \cup (tB)$

$tX = X \setminus X = \emptyset$

$X \setminus (tA) = X \setminus (X \setminus A)$
$= A$

$t(X \setminus A) = X \setminus (X \setminus A)$
$= A$

Só isso mesmo.

*Universal Mapping Property

Rascunho