FMC2, 2018.2
(Turma N12 do Thanos)

Prova 1.1
(points: 24; bonus: $0^\flat$; time: 40')

Nome: Θάνος **Gabarito**

31/08/2018

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la.*

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

XII. **Responda em até 2 dos $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$.**[4]

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.
[4] Provas com respostas em mais problemas não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(6) **A**

Escolha **exatamente uma** das **A1** e **A2**.[5]

Defina formalmente...

(3) **A1.** ...o operador binário de produto cartesiano.

DEFINIÇÃO:

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{\, (x, y) \ \mid\ x \in A, y \in B \,\}$$

(6) **A2.** ...o operador unário de intersecção de família indexada.

DEFINIÇÃO:

Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família de conjuntos indexada por um conjunto de índices I. Definimos sua intersecção pela

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \overset{\text{def}}{\iff} \text{para todo } i \in I,\ x \in A_i.$$

(8) **B**

Prove ou refute: Para todo conjunto A e toda seqüência de conjuntos $\{B_n\}_n$

$$A \cup \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} (A \cup B_n)$$

PROVA/REFUTAÇÃO.

A afirmação é verdadeira.

"$\subseteq$": Suponha $x \in A \cup \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n$. Logo $x \in A$ ou $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n$.

CASO $x \in A$. Temos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $x \in A \cup B_n$ (pois $x \in A$), e logo $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} (A \cup B_n)$.

CASO $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n$. Seja $n \in \mathbb{N}$. Preciso mostrar que $x \in A \cup B_n$, que é verdade pois $x \in B_n$ pela hipótese do caso.

"$\supseteq$": Suponha $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} (A \cup B_n)$. Logo $x \in A \cup B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

CASO $x \in A$, o resultado é imediato

CASO $x \notin A$. Seja $m \in \mathbb{N}$. Vou mostrar que $x \in B_m$. Sabemos pela hipótese que $x \in A \cup B_m$, e como $x \notin A$, logo $x \in B_m$. Como o m foi arbitrário, concluimos que para todo $m \in \mathbb{N}$, $x \in B_m$, que foi exatamente o que precisamos provar.

[5] Se responderes em ambas, tirarás 0 pontos.

(4) **C**

Calcule a extensão do conjunto:

$$\{\{\emptyset\}\} \mathbin{\triangle} \bigcup \emptyset = \boxed{\{\{\emptyset\}\} \mathbin{\triangle} \emptyset = \{\{\emptyset\}\}}$$

(16) **D**

Sejam I, J conjuntos de índices e para cada $k \in I \cup J$ seja A_k um conjunto. A afirmação

$$\bigcup_{k \in I \cap J} A_k = \bigcup_{k \in I} A_k \cap \bigcup_{k \in J} A_k$$

é verdadeira? Responda... (1) "sim", e prove; (2) "não", e refute; ou (3) "depende", e demonstre dois exemplos: um onde a afirmação é verdadeira, e outro onde não é.
RESPOSTA (SIM / NÃO / DEPENDE).

Depende!

Primeiramente um exemplo onde a afirmação é válida:

$$I = J = \{1\} \qquad A_1 = \{5\}$$

...e um onde a afirmação é falsa:

$$I = \{1\} \qquad A_1 = A_2 = \{5\}$$
$$J = \{2\}$$

Realmente, verificamos calculando no primeiro exemplo:

$$\bigcup_{k \in I \cap J} A_k = A_1 \qquad \bigcup_{k \in I} A_k \cap \bigcup_{k \in J} A_k = A_1 \cap A_1 = A_1$$

...e no segundo:

$$\bigcup_{k \in I \cap J} A_k = \bigcup_{k \in \emptyset} A_k = \emptyset \qquad \bigcup_{k \in I} A_k \cap \bigcup_{k \in J} A_k = A_1 \cap A_2 = \{5\}$$

Só isso mesmo.