**FMC2, 2018.1**
(Turma N12 do Thanos)

**Prova 2.1**
(points: 156; bonus: $0^\flat$; time: 60')

---

**Nome:**

---

*11/06/2018*

## Regras:

**I.** Não vires esta página antes do começo da prova.

**II.** Nenhuma consulta de qualquer forma.

**III.** Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

**IV.** Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

**V.** $\forall x \big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg \mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

**VI.** Use caneta para tuas respostas.

**VII.** Responda dentro das caixas indicadas.

**VIII.** Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la.*

**IX.** Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

**X.** Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo!

**XI.** Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

**XII.** **Responda em até 2 dos $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}$.**[4]

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bônus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

[4] Provas com respostas em mais que três problemas não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

## Lembram-se:

**Definição 1 (grupo; grupo abeliano).** Um conjunto estruturado $\mathcal{G} = \langle G\ ;\ e, *\rangle$ é um *grupo* sse:

$$(\forall a, b \in G)\,[\, a * b \in G\,] \tag{G0}$$

$$(\forall a, b, c \in G)\,[\, a * (b * c) = (a * b) * c\,] \tag{G1}$$

$$(\forall a \in G)\,[\, e * a = a = a * e\,] \tag{G2}$$

$$(\forall a \in G)\,(\exists y \in G)\,[\, y * a = e = a * y\,] \tag{G3}$$

Se $\mathcal{G}$ satisfaz as (G0)–(G3) em cima e a

$$(\forall a, b \in G)\,[\, a * b = b * a\,] \tag{G4}$$

chamamos o $\mathcal{G}$ *grupo abeliano*. Denotamos o inverso de $a \in G$ garantido pela (G3) com $a^{-1}$ ou $(-a)$, dependendo se usamos notação multiplicativa ou aditiva para o grupo.

**Definição 2.** Sejam $G$ grupo $g \in G$, e $A, B \subseteq G$. Definimos

$$gA \stackrel{\text{def}}{=} \{ga \mid a \in A\} \qquad\qquad AB \stackrel{\text{def}}{=} \{ab \mid a \in A,\ b \in B\} \qquad\qquad \ldots\text{etc.}$$

**Definição 3 (subgrupo).** Seja $G$ grupo e $H \subseteq G$. O $H$ é um subgrupo de $G$ (escrevemos $H \leq G$) sse $H$ forma um grupo com a mesma operação (restrita no $H \times H$).

**Definição 4 (conjugação).** Seja $G$ grupo e $a, b \in G$. Chamamos o $b$ conjugado de $a$ sse existe $g \in G$ tal que

$$a = gbg^{-1}.$$

**Definição 5 (subgrupo normal).** Um subgrupo $N \leq G$ é *subgrupo normal* de $G$ sse

$$\begin{aligned} N \trianglelefteq G &\stackrel{\text{def}}{\iff} N \text{ é fechado pelos conjugados} \\ &\iff \text{para todo } n \in N \text{ e } g \in G,\ gng^{-1} \in N \\ &\iff \text{para todo } g \in G,\ gN = Ng \end{aligned}$$

**Definição 6 (homomorfismo de grupo).** Um *homomorfismo* $\varphi$ do grupo $\langle A\ ;\ e_A, \cdot_A\rangle$ para o grupo $\langle B\ ;\ e_B, \cdot_B\rangle$ é uma função $\varphi : A \to B$ tal que:

(i) para todo $x, y \in A$, $\varphi(x \cdot_A y) = \varphi(x) \cdot_B \varphi(y)$;

(ii) $\varphi(e_A) = e_B$;

(iii) para todo $x \in A$, $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$.

**Definição 7 (kernel).** Sejam $A$ e $B$ grupos e $\varphi$ homomorfismo de $A$ para $B$. Definimos

$$\ker \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A \mid \varphi(x) = e_B\}\,.$$

*Boas provas!*

(28) **A**

Seja $G$ grupo e $\emptyset \neq H \subseteq G.$ tal que para todo $a, b \in H$, $ab^{-1} \in H.$ Prove que $H \leq G$.
Prova.

## (32) B

Prove "from scratch" (usando apenas os (G0)–(G3)) a unicidade de inversos nos grupos.

***Dica:*** *Pode provar lémmata (resultados intermediários) para te ajudar.*

Prova.

(38) **C**

**Definição.** Um *monóide* é um conjunto estruturado $\mathcal{M} = \langle M \; ; \cdot, \epsilon \rangle$ que satisfaz as (G0)–(G2). Uma função $\phi : A \to B$ entre monóides é um homomorfismo sse $\phi$ respeita a estrutura:

(i) para todo $x, y \in A$, $\varphi(x \cdot_A y) = \varphi(x) \cdot_B \varphi(y)$;

(ii) $\varphi(e_A) = e_B$;

**Teorema.** Sejam $M, N$ monóides e $\phi : M \twoheadrightarrow N$ função *sobrejetora* tal que respeita a operação:

$$\text{para todo } x, y \in M, \quad \phi(x \cdot_M y) = \phi(x) \cdot_N \phi(y)$$

Então $\phi$ é um homomorfismo.

Prova.

(46) **D**

Sejam $A$ e $B$ grupos e $\varphi : A \to B$ homomorfismo.

(23) **D1.** $\ker \varphi \leq A$

PROVA.

(23) **D2.** $\ker \varphi \trianglelefteq A$

PROVA.

(56) **E**

Seja $G$ grupo e $a, b \in G$ conjugados.

(32) **E1.** Para todo $n \in \mathbb{N}$, $a^n$ e $b^n$ também são conjugados;

**Dica:** *Indução.*

Prova.

(24) **E2.** $o(a) = o(b)$.

Prova.

(100) **F**

Já provamos algo que informalmente falando podemos escrever assim:

$$\text{kernel} \implies \text{normal}$$

Formalize e prove o converso.

(16) Teorema.

(84) Prova.

Só isso mesmo.

RASCUNHO

Rascunho

Rascunho

Rascunho