FMC2, 2017.2
(Turmas T34&N12 do Thanos)

Prova 3
(points: 128/100; bonus: $0^\flat$; time: 90')

Nome: Θάνος **Gabarito**

08/12/2017

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra, antes de usá-la.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

XI. Os pontos bônus serão considerados apenas para quem conseguir passar sem.[3]

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

Axiomas ZF

Extensionality.

$$\forall a \forall b\, (a = b \leftrightarrow \forall x (x \in a \leftrightarrow x \in b)) \tag{ZF1}$$

Emptyset.

$$\exists e \forall x (x \notin e) \tag{ZF2}$$

Pairset.

$$\forall a \forall b \exists s \forall x\, (x \in s \leftrightarrow (x = a \lor x = b)) \tag{ZF3}$$

Separation (schema).
Para cada formula $\varphi(x)$ o seguinte:

$$\forall w \exists s \forall x\, (x \in s \leftrightarrow (x \in w \land \varphi(x))) \tag{ZF4}$$

Powerset.

$$\forall a \exists s \forall x\, (x \in s \leftrightarrow x \subseteq a) \tag{ZF5}$$

Unionset.

$$\forall a \exists s \forall x\, (x \in s \leftrightarrow \exists d (x \in d \land d \in a)) \tag{ZF6}$$

Infinity.

$$\exists i\, (\emptyset \in i \land \forall x (x \in i \to x \cup \{x\} \in i)) \tag{ZF7}$$

Lembre-se:

$\wp A \overset{\text{def}}{=} \text{O conjunto de partes de } A$	$A =_{\text{c}} B \overset{\text{def}}{\iff} \text{Os } A,\, B \text{ são equinúmeros}$
$\wp_{\text{f}} A \overset{\text{def}}{=} \{X \subseteq A \mid X \text{ é finito}\}$	$A \leq_{\text{c}} B \overset{\text{def}}{\iff} \exists C\, (C \subseteq B \;\land\; A =_{\text{c}} C)$
$A^* \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$	$f : A \rightarrowtail B \overset{\text{def}}{\iff} f \text{ é função injetora de } A \text{ para } B$
$\overline{n} \overset{\text{def}}{=} \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\}$	$f : A \twoheadrightarrow B \overset{\text{def}}{\iff} f \text{ é função sobrejetora de } A \text{ para } B$
$(A \to B) \overset{\text{def}}{=} \{f \mid f : A \to B\}$	$f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow B \overset{\text{def}}{\iff} f \text{ é função bijetora de } A \text{ para } B$
${\downarrow} a \overset{\text{def}}{=} \{x \in P \mid x \leq a\}$	$D \text{ downset} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall d \in D)\, (\forall x \in P)\, [\, x \leq d \implies x \in D\,]$
${\uparrow} a \overset{\text{def}}{=} \{x \in P \mid a \leq x\}$	$U \text{ upset} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall u \in U)\, (\forall x \in P)\, [\, u \leq x \implies x \in U\,]$

Definição. Um *sistema Peano* é um conjunto estruturado $\mathcal{N} = \langle \mathbf{N}\,;\, \mathsf{0}, \mathsf{S} \rangle$ que satisfaz as leis:

(P1)	Zero é um número natural:	$\mathsf{0} \in \mathbf{N}$
(P2)	O sucessor é uma operação unária nos naturais:	$\mathsf{S} \;:\; \mathbf{N} \to \mathbf{N}$
(P3)	Naturais diferentes tem sucessóres diferentes:	$\mathsf{S} \;:\; \mathbf{N} \rightarrowtail \mathbf{N}$
(P4)	Zero não é o sucessor de nenhum natural:	$\mathsf{0} \notin \mathsf{S}[\mathbf{N}]$
(P5)	Os naturais satisfazem o princípio da indução:	

Princípio da indução: *para todo $X \subseteq \mathbf{N}$,*

$$(\mathsf{0} \in X \land \forall n\, (n \in X \to \mathsf{S}n \in X)) \to X = \mathbf{N}.$$

Definição. Um poset $\mathcal{L} = \langle L\,;\, \leq \rangle$ é um *reticulado* sse para todo $x, y \in L$ existem os $x \lor y$ e $x \land y$, onde

$$x \lor y \overset{\text{def}}{=} \sup\{x, y\} \qquad\qquad x \land y \overset{\text{def}}{=} \inf\{x, y\}$$

(24) **A**

Sejam conjuntos A, A', B, B', C tais que $A =_{\mathrm{c}} A'$ e $B =_{\mathrm{c}} B'$.
Prove **exatamente uma** das 4 afirmações:

(8) (i) $A \times B =_{\mathrm{c}} A' \times B'$

(14) (ii) $\wp A =_{\mathrm{c}} \wp A'$

(18) (iii) $(A \to B) =_{\mathrm{c}} (A' \to B')$

(24) (iv) $((A \times B) \to C) =_{\mathrm{c}} (A \to (B \to C))$

Dica: Não use o *Schröder–Bernstein*.

Prova.

Sejam as bijeções $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow A'$ e $g : B \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow B'$.

(i) Defina $F : A \times B \to A' \times B'$ pela $F(a, b) = (f(a), g(b))$.

(ii) Defina $F : \wp A \to \wp A'$ pela $F(X) = f[X]$.

(iii) Defina $F : (A \to B) \to (A' \to B')$ pela $F(t) = g \circ t \circ f^{-1}$.

(iv) Defina $F : ((A \times B) \to C) \to (A \to (B \to C))$, pela $F(t) = \lambda a.\lambda b.t(a, b)$.

Injetoridade e sobrejetoridade é fácil para provar para as funções definidas em cima. Por exemplo, para a F de (iii), temos:
Injetora: Sejam $s, t \in (A \to B)$ com $s \neq t$. Logo existe $a_0 \in A$ tal que $s(a_0) \neq t(a_0)$. Calcule:

$$\begin{aligned}
(F(s))(f(a_0)) &= (g \circ s \circ f^{-1})(f(a_0)) \\
&= (g \circ s)(a_0) \\
&= g(s(a_0)) \\
&\neq g(t(a_0)) && (g \text{ injetora } \& \ s(a_0) \neq t(a_0)) \\
&= (g \circ t)(a_0) \\
&= (g \circ s \circ f^{-1})(f(a_0)) \\
&= (F(t))(f(a_0)).
\end{aligned}$$

Sobrejetora: Seja $t' \in (A' \to B')$. Defina a $t \in (A \to B)$ pela

$$t = g^{-1} \circ t' \circ f$$

e observe que $F(t) = t'$.

(32) **B**

Considere o axioma seguinte:

$$\forall h \forall t \exists s \forall x \big(x \in s \leftrightarrow x = h \lor x \in t\big). \tag{ZF3*}$$

(16) **B1.** No sistema ZF1+ZF2+ZF3*, prove o ZF3 como teorema.
PROVA.

Dados os objetos a, b, queremos construir o $\{a, b\}$. Aplicando o (ZF3*) com $h := b$ e $t := \emptyset$ ganhamos o $\{b\}$, e agora aplicando novamente o mesmo axioma com $h := a$ e $t := \{b\}$ ganhamos o desejado $\{a, b\}$.

(16) **B2.** Mostre que não tem como provar o ZF3* no sistema ZF1+ZF2+ZF3.
DEMONSTRAÇÃO.

Observe que com os axiomas ZF1+ZF2+ZF3* conseguimos construir conjuntos de qualquer cardinalidade finita, mas com os ZF1+ZF2+ZF3 conseguimos construir apenas conjuntos com cardinalidades 0, 1, ou 2.

Basta realmente construir um conjunto com cardinalidade maior que 2 então.

Aplique o ZF3* com $h, t := \emptyset$ ganhando assim o $\{\emptyset\}$. Agora com $h := \{\emptyset\}$ e $t := \emptyset$ ganhando o $\{\{\emptyset\}\}$. Com $h := \emptyset$ e $t := \{\{\emptyset\}\}$ ganhamos o $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. E finalmente, com $h, t := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ construimos o $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, que tem cardinalidade 3.

(36) **C**

Para qualquer sistema Peano $\mathcal{N} = \langle \mathbf{N} \mathbin{;} 0, \mathsf{S} \rangle$, definimos as operações:

$$n + 0 = n \qquad \text{(a1)} \qquad\qquad n \cdot 0 = 0 \qquad \text{(m1)}$$
$$n + \mathsf{S}m = \mathsf{S}(n + m) \qquad \text{(a2)} \qquad\qquad n \cdot \mathsf{S}m = (n \cdot m) + n \qquad \text{(m2)}$$

Sejam dois sistemas Peano $\mathcal{N}_1 = \langle \mathbf{N}_1 \mathbin{;} 0_1, \mathsf{S}_1 \rangle$ e $\mathcal{N}_2 = \langle \mathbf{N}_2 \mathbin{;} 0_2, \mathsf{S}_2 \rangle$, e suas operações de adição $+_1$ e $+_2$. Seja $\varphi : \mathbf{N}_1 \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbf{N}_2$ o isomorfismo definido recursivamente pelas

$$\varphi(0_1) = 0_2 \tag{φ1}$$
$$\varphi(\mathsf{S}_1 n) = \mathsf{S}_2(\varphi(n)). \tag{φ2}$$

(18) **C1.** Prove que φ é sobrejetora.

Dica: *Mostre que* $\varphi[\mathbf{N}_1] = \mathbf{N}_2$.

PROVA.

Como $\varphi[\mathbf{N}_1] \subseteq \mathbf{N}_2$, provamos a igualdade usando o princípio da indução (P5).

$0_2 \in \varphi[\mathbf{N}_1]$: Imediato pois $\varphi(0_1) = 0_2$.

Suponha $k \in \varphi[\mathbf{N}_1]$. Precisamos mostrar que $\mathsf{S}_2 k \in \varphi[\mathbf{N}_1]$. Pela escolha de k, tome $k' \in \mathbf{N}_1$ tal que $\varphi(k') = k$. Calculamos:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathsf{S}_1 k') &= \mathsf{S}_2(\varphi(k')) && \text{(pela def. } \varphi) \\ &= \mathsf{S}_2 k && \text{(pela escolha de } k') \end{aligned}$$

ou seja, $\mathsf{S}_2 k \in \varphi[\mathbf{N}_1]$.

(18) **C2.** Prove que φ respeita a adição, ou seja, para todos $m, n \in \mathbf{N}_1$,

$$\varphi(n +_1 m) = \varphi(n) +_2 \varphi(m).$$

PROVA.

Por indução no m.

BASE: Queremos provar: $(\forall n \in \mathbf{N}_1)\,[\,\varphi(n +_1 0_1) = \varphi(n) +_2 \varphi(0_2)\,]$

Seja $n \in \mathbf{N}_1$. Calculamos:

$$\varphi(n +_1 0_1) \overset{(\mathrm{a1})_1}{=} \varphi(n) \overset{(\mathrm{a1})_2}{=} \varphi(n) +_2 0_2 \overset{(\varphi 1)}{=} \varphi(n) +_2 \varphi(0_1)$$

Seja $k \in \mathbf{N}_1$ tal que

$$\textit{para todo } n \in \mathbf{N}_1, \quad \varphi(n +_1 k) = \varphi(n) +_2 \varphi(k). \tag{H.I.}$$

Queremos provar: $(\forall n \in \mathbf{N}_1)\,[\,\varphi(n +_1 \mathsf{S}_1 k) = \varphi(n) +_2 \varphi(\mathsf{S}_1 k)\,]$.

Seja $n \in \mathbf{N}_1$. Calculamos:

$$\begin{aligned} \varphi(n +_1 \mathsf{S}_1 k) &= \varphi(\mathsf{S}_1(n +_1 k)) && (\mathrm{a1})_2 \\ &= \mathsf{S}_2(\varphi(n +_1 k)) && (\varphi 2) \\ &= \mathsf{S}_2(\varphi(n) +_2 \varphi(k)) && (\text{H.I., com } n := n) \\ &= \varphi(n) +_2 \mathsf{S}_2 \varphi(k) && (\mathrm{a2})_2 \\ &= \varphi(n) +_2 \varphi(\mathsf{S}_1 k) && (\varphi 2) \end{aligned}$$

(36) **D**

Sejam P um poset, $x, y \in P$. Prove que as afirmações

(i) $x \leq y$;

(ii) $\downarrow x \subseteq \downarrow y$;

(iii) para todo downset D de P com $y \in D$, temos $x \in D$.

são equivalentes. Em cada parte escreva claramente qual das implicações tu tá provando.

PROVA.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Seja $a \in \downarrow x$. Logo $a \leq x$, e como $x \leq y$ (hipótese), pela transitividade da $\leq$ temos $a \leq y$. Logo $a \in \downarrow y$. Ou seja, $\downarrow x \subseteq \downarrow y$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Seja D downset de P com $y \in D$. Logo $\downarrow y \subseteq D$. Pela hipótese $\downarrow x \subseteq \downarrow y$ e logo $\downarrow x \subseteq D$. Como $x \in \downarrow x$, então $x \in D$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Observe que $\downarrow y$ é um downset tal que y pertence nele. Logo $x \in \downarrow y$ (pela hipótese). Logo $x \leq y$ (pela def. de $\downarrow y$).

Só isso mesmo.