FMC2, 2017.1
(Turma ♣T56♣ do Thanos)

Prova 1.2
(points: 72/100; bonus: 16$^\flat$; time: 100')

Nome: Θάνος **Gabarito**

08/05/2017

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra, antes de usá-la.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

XII. Escolha até 3 dos A, B, C, D para responder.[4]

Lembre-se:

$\mathcal{P}A \stackrel{\text{def}}{=}$ O conjunto de partes de A

$\mathcal{P}_{\mathrm{f}}A \stackrel{\text{def}}{=} \{X \subseteq A \mid X \text{ é finito}\}$

$A^* \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$

$\overline{n} \stackrel{\text{def}}{=} \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\}$

$(A \to B) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \mid f : A \to B\}$

$A =_{\mathrm{c}} B \stackrel{\text{def}}{\iff}$ Os A, B são equinúmeros

$A \leq_{\mathrm{c}} B \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists C\,(C \subseteq B \;\land\; A =_{\mathrm{c}} C)$

$f : A \rightarrowtail B \stackrel{\text{def}}{\iff}$ f é função injetora de A para B

$f : A \twoheadrightarrow B \stackrel{\text{def}}{\iff}$ f é função sobrejetora de A para B

$f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow B \stackrel{\text{def}}{\iff}$ f é função bijetora de A para B

Podes usar as seguintes equinumerosidades sem as provar:

$$\mathbb{N} =_{\mathrm{c}} \mathbb{Z} =_{\mathrm{c}} \mathbb{Q} =_{\mathrm{c}} \mathcal{P}_{\mathrm{f}}\mathbb{N} =_{\mathrm{c}} \mathbb{N}^2 =_{\mathrm{c}} \mathbb{N}^*$$
$$\mathbb{R} =_{\mathrm{c}} \mathbb{R}^2 =_{\mathrm{c}} (0,1) =_{\mathrm{c}} [0,1] =_{\mathrm{c}} [0,1) =_{\mathrm{c}} (0,1] =_{\mathrm{c}} \mathcal{P}\mathbb{N} =_{\mathrm{c}} (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) =_{\mathrm{c}} (\mathbb{N} \to \overline{2})$$

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

[4] Provas com respostas nas 4 partes não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(24) **A**

(8) **A1.** Seja $\sim$ uma relação de equivalência num conjunto A, e seja $a \in A$.
Defina a classe de equivalência $[a/{\sim}]$ e o conjunto quociente $A/{\sim}$.
DEFINIÇÕES.

$$[a/{\sim}] \stackrel{\text{def}}{=} \boxed{\{x \in A \mid x \sim a\}}$$

$$A/{\sim} \stackrel{\text{def}}{=} \boxed{\{[a/{\sim}] \mid a \in A\}}$$

(16) **A2.** Prove que:

$$A \leq_c B \iff (\exists f)[f : A \rightarrowtail B]$$

PROVA.

"$\Rightarrow$": Pela definição de $\leq_c$, tome $C \subseteq B$ com $A =_c C$. Pela definição de $=_c$, tome $g : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow C$ e defina $f : A \rightarrowtail B$ pela $f(x) = g(x)$. Como a g é injetora, a f também é.

"$\Leftarrow$": Seja $f : A \rightarrowtail B$. Observe que $f[A] \subseteq B$ e $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow f[A]$.
(Injetora pela hipótese, sobrejetora pela definição do $f[A]$.)

(24) B

(12) **B1.** Para qualquer conjunto A definimos

$$\mathcal{P}_\infty A \stackrel{\text{def}}{=} \{C \subseteq A \mid C \text{ infinito}\}.$$

Qual a cardinalidade do $\mathcal{P}_\infty \mathbb{N}$?

RESPOSTA & PROVA.

O $\mathcal{P}_\infty \mathbb{N}$ é incontavel, com $\mathcal{P}_\infty \mathbb{N} =_c \mathcal{P}\mathbb{N}$.

Temos $\mathcal{P}_f \mathbb{N} =_c \mathbb{N}$ (dado na p.1). Se $\mathcal{P}_\infty \mathbb{N}$ fosse contável, a união $\mathcal{P}_f \mathbb{N} \cup \mathcal{P}_\infty \mathbb{N} = \mathcal{P}\mathbb{N}$ seria contável também, absurdo. Então $\mathcal{P}_\infty \mathbb{N} >_c \mathbb{N}$ e tambem $\mathcal{P}_\infty \mathbb{N} \leq_c \mathcal{P}\mathbb{N}$ (porque $\mathcal{P}_\infty \mathbb{N} \subseteq \mathcal{P}\mathbb{N}$). Ou seja, $\mathbb{N} <_c \mathcal{P}_\infty \mathbb{N} \leq_c \mathcal{P}\mathbb{N}$.

...logo $\mathcal{P}_\infty \mathbb{N} =_c \mathcal{P}\mathbb{N}$??

(12) **B2.** Sejam A, B, e C conjuntos. Sem usar o teorema Schröder–Bernstein, prove que:

$$(A \to (B \times C)) =_c (A \to B) \times (A \to C)$$

PROVA.

Definimos a função e verificamos que realmente é bijetora:

$$\begin{aligned} F &: \big((A \to B) \times (A \to C)\big) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \big(A \to (B \times C)\big) \\ F(f, g) &= \lambda x. \langle f(x), g(x) \rangle. \end{aligned}$$

INJETORA: Suponha que $\langle f, g \rangle \neq \langle f', g' \rangle$. Logo $f \neq f'$ ou $g \neq g'$ (def. de $=$ entre tuplas). Sem perda de generalidade, suponha $f \neq f'$. Então tome $a \in A$ com $f(a) \neq f'(a)$ (def. de $=$ entre funções) e calcule:

$$\begin{aligned} \big(F(f, g)\big)(a) &= \langle f(a), g(a) \rangle && \text{(def. } F\text{)} \\ &\neq \langle f'(a), g'(a) \rangle && (f(a) \neq f'(a)) \\ &= \big(F(f', g')\big)(a) && \text{(def. } F\text{)} \end{aligned}$$

Ou seja, $F(f, g) \neq F(f', g')$.

SOBREJETORA: Seja $h : A \to (B \times C)$. O $\langle \pi_0 \circ h, \pi_1 \circ h \rangle \in \text{dom}(F)$ satisfaz a

$$F(\pi_0 \circ h, \pi_1 \circ h) = h,$$

onde π_i é a i-ésima projeção.

Abordagem alternativa

Construindo a bijeção na direção oposta:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, dotted, "?"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, dotted, "?"] & \\ B & B \times C \arrow[l, "\pi_0"] \arrow[r, "\pi_1"'] & C \end{tikzcd}$$

(24) **C**

(16) **C1.** Seja $\sim$ uma relação de equivalência no conjunto $\mathbb{N}$. Prove que

$$\mathbb{N}/{\sim} <_{\mathrm{c}} \mathcal{P}\mathbb{N}.$$

PROVA.

Graças o teorema de Cantor temos $\mathbb{N} <_{\mathrm{c}} \mathcal{P}\mathbb{N}$, então basta mostrar que $\mathbb{N}/{\sim} \leq_{\mathrm{c}} \mathbb{N}$.

Definimos a função

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{N}/{\sim} \rightarrowtail \mathbb{N} \\ f(C) &= \min C. \end{aligned}$$

A f É BEM DEFINIDA graças ao princípio da boa ordem (sabemos que $C \neq \emptyset$ pois $\mathbb{N}/{\sim}$ é uma partição de $\mathbb{N}$).

A f É INJETORA: Suponha $C, C' \in \mathbb{N}/{\sim}$ com $C \neq C'$. Como C e C' são disjuntos (pois $\mathbb{N}/{\sim}$ é uma partição), temos $\min C \neq \min C'$ e chagamos em:

$$f(C) = \min C \neq \min C' = f(C').$$

(8) **C2.** Afirmação: *Para qualquer conjunto A, se $\sim$ é uma relação de equivalência no A, então*

$$A/{\sim} <_{\mathrm{c}} \mathcal{P}A.$$

PROVA/REFUTAÇÃO.

Correto! Seguimos a prova do **C1** mas onde tomamos como representante da classe seu mínimo elemento, aqui escolhemos aleatoriamente qualquer elemento da classe—que talvez nem tem mínimo. Mas na prova anterior nem precisamos nada especial desse elemento alem de... ser membro da sua própria classe!

Basta escolher aleatoriamente então para cada classe de equivalência $X \in A/{\sim}$ um representante $r_X \in X$, e definir:

$$\begin{aligned} f &: A/{\sim} \rightarrowtail A \\ f(X) &= r_X. \end{aligned}$$

Seguindo os passos da prova do **C1** chegamos no

$$f(A) = r_A \neq r_{A'} = f(A').$$

$(24 + 16^\flat)$ **D**

No conjunto $\mathbb{R}$ defina as relações:

$$x \smile y \overset{\text{def}}{\iff} x \leq y \quad \land \quad (\nexists n \in \mathbb{Z})[x \leq n \leq y]$$
$$x \frown y \overset{\text{def}}{\iff} x \leq y \quad \land \quad (\nexists n \in \mathbb{Z})[x < n < y]$$

Sejam $\ddot{\smile}$ o fecho reflexivo-simétrico da $\smile$, e $\ddot{\frown}$ o fecho simétrico da $\frown$.

(12) **D1.** Prove que $\ddot{\smile}$ é uma relação de equivalência.

PROVA.

Defina a partição de $\mathbb{R}$

$$\mathscr{C} \overset{\text{def}}{=} \underbrace{\{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}}_{\mathcal{I}} \cup \underbrace{\{\{n\} \mid n \in \mathbb{Z}\}}_{\mathcal{S}}.$$

Basta provar que $\mathscr{C} = \mathbb{R}/\ddot{\smile}$, ou seja:

$$x \mathrel{\ddot{\smile}} y \iff (\exists C \in \mathscr{C})\,[\,x \in C \land y \in C\,].$$

"$\Leftarrow$": Trivial nos dois casos $C \in \mathcal{I}$ e $C \in \mathcal{S}$.

"$\Rightarrow$": Pela hipótese, $x = y$ ou $x \smile y$ ou $y \smile x$.

CASO $x = y$:
Se $x \in \mathbb{Z}$ tome $C = \{x\} \in \mathcal{S}$.
Se $x \notin \mathbb{Z}$ tome $C = (\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1) \in \mathcal{I}$.

CASO $x \smile y$:
Nesse caso $[x, y] \cap \mathbb{Z} = \emptyset$.
Facilmente, $\lfloor x \rfloor < x \leq y < \lfloor x \rfloor + 1$.
Tome novamente $C = (\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1) \in \mathcal{I}$.

CASO $y \smile x$: Similar.

(12) **D2.** Afirmação: *$\ddot{\frown}$ é uma relação de equivalência.*

PROVA/REFUTAÇÃO.

Não é, pois não é transitiva.

Observe que $0 \mathrel{\ddot{\frown}} 1$, pois não existe inteiro no $(0, 1)$, e similarmente $1 \mathrel{\ddot{\frown}} 2$. Mas $0 \mathrel{\not\ddot{\frown}} 2$, pois 1 é inteiro e $1 \in (0, 2)$.

$(16^\flat)$ **D3.** Ache as cardinalidades dos conjuntos:

(i) $\mathbb{R}/\ddot\smile$

Resposta & Prova.

$|\mathbb{R}/\ddot\smile| = \aleph_0$.

Na **D1** já calculamos o

$$\mathbb{R}/\ddot\smile = \mathscr{C} = \underbrace{\{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}}_{\mathcal{I}} \cup \underbrace{\{\{n\} \mid n \in \mathbb{Z}\}}_{\mathcal{S}}.$$

Cada um dos $\mathcal{I}$, $\mathcal{S}$ está numa correspondência óbvia com o $\mathbb{Z}$:

$$n \mapsto (n, n+1)$$
$$n \mapsto \{n\}$$

Logo $\mathcal{I}$ e $\mathcal{S}$ são contáveis e o $\mathbb{R}/\ddot\smile$ também é, como união de dois conjuntos contáveis.

(ii) $\{|C| \mid C \in \mathbb{R}/\ddot\smile\}$

Resposta & Prova.

$\Big|\{|C| \mid C \in \mathbb{R}/\ddot\smile\}\Big| = 2$.

Tome uma classe de equivalência $C \in \mathscr{C} = \mathbb{R}/\ddot\smile$.
Se $C \in \mathcal{S}$, então $C = \{n\}$ para algum $n \in \mathbb{Z}$ e $|C| = 1$.
Se $C \in \mathcal{I}$, então $C = (m, m+1)$ para algum inteiro m, e $|C| = \mathfrak{c}$.
Logo, $\{|C| \mid C \in \mathbb{R}/\ddot\smile\} = \{1, \mathfrak{c}\}$.

Só isso mesmo.