FMC2, 2016.1
(Turma do Thanos)

Prova 3
(pts: 128, max: 100)

A (9 pts)

(6.0) **A1.** Prove que $\langle \mathbb{N} \, ; \, | \rangle$ é um poset.

(1.0) **A2.** Ele é linear?

(2.0) **A3.** Ache o max e o min (se tem).

B (2 pt)

Seja $D_{12} = \{d \in \mathbb{N} \mid d \mid 12\}$. Desenha o diagrama Hasse do poset $\langle D_{12} \, ; \, | \rangle$.

C (9 pts)

Seja a relação $\leq_{\exists\forall}$ no $(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$, definida pelo:

$$f \leq_{\exists\forall} g \overset{\triangle}{\iff} (\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \geq n)[f(m) \leq g(m)]$$

Mostre quais das quatro propriedades da ordem total são satisfeitas pela $\leq_{\exists\forall}$:

(1.0) $$f \leq_{\exists\forall} f \qquad (1)$$
(2.6) $$f \leq_{\exists\forall} g \;\&\; g \leq_{\exists\forall} h \implies f \leq_{\exists\forall} h \qquad (2)$$
(2.4) $$f \leq_{\exists\forall} g \;\&\; g \leq_{\exists\forall} f \implies f = g \qquad (3)$$
(2.0) $$f \leq_{\exists\forall} g \text{ ou } g \leq_{\exists\forall} f \qquad (4)$$

D (8 pts)

O poset D com o diagrama Hasse da Fig. 1, é um lattice?

E (12 pts)

Para cada um dos posets seguintes,

(4×1.0) (i) desenha seu diagrama Hasse;

(4×1.0) (ii) ele é um lattice?

(4×1.0) (iii) ache os maximais, os minimais, o máximo, e o mínimo dele (se tem).

E1. $\overline{\mathbf{2}} \oplus \overline{\mathbf{3}}$ **E2.** $\overline{\mathbf{2}} \oplus \mathbf{2}$ **E3.** $\overline{\mathbf{1}} \oplus \overline{\mathbf{2}} \oplus \overline{\mathbf{3}}$ **E4.** $\left(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \overline{\mathbf{n}}\right)^{\partial}$

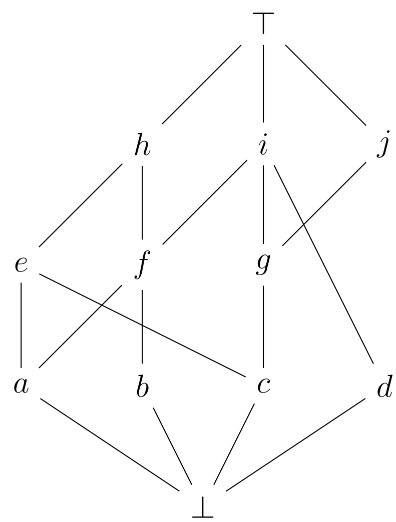

Figure 1: O Hasse diagrama do poset D.

F (32 pts)

Sejam conjunto A, e poset $\langle B \,;\, \leq \rangle$. No conjunto $(A \to B)$, seja a ordem

$$f \preceq g \overset{\triangle}{\iff} (\forall a \in A)[f(a) \leq g(a)],$$

que o vira um poset $\langle (A \to B) \,;\, \preceq \rangle$.

F1. No caso especial de funções em $(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$:

(4.0) • O poset $\langle (\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \,;\, \preceq \rangle$ é um lattice?

(4.0) • Sendo $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2$, quais seriam as funções $f \vee g$ e $f \wedge g$?

(12.0) • Desenha os gráficos delas.

F2. Descreva quando $f \prec g$ nos posets:

(4.0) (i) $(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$

(8.0) (ii) $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})$.

G (12 pts)

Sejam $\langle P \,;\, \leq \rangle$ poset e $x, y \in P$. Os seguintes são equvalentes:

(i) $x \leq y$

(ii) ${\downarrow}x \subseteq {\downarrow}y$

(iii) para todo $Q \in \mathcal{O}(P)$, $y \in Q \implies x \in Q$.

G′ (18 pts)

Seja L reticulado tal que para todo $A \subseteq L$, o $\bigvee$ existe. Prove que L é completo.

H (8 pts)

Descreva os elementos do $\mathcal{O}(\mathbb{Q})$.

H′ (26 pts)

Para os valores seguintes de X,

(a) $X = \omega + \mathbf{3}$

(b) $X = \omega \cdot \mathbf{2}$

(c) $X = \omega^2$

(d) $X = \omega^2 + \mathbf{1}$

H′1. Achar order-embedding $\phi : X \hookrightarrow \mathbb{Q}$.

H′2. Achar ordem estrita $<'$ tal que $\langle \mathbb{N} \,;\, <' \rangle \cong X$.

I (6 pts)

Define um poset P tal que:

(i) $x, y, z \in P$;

(ii) nenhum dos $x \vee y$, $y \vee z$, e $z \vee x$ existe;

(iii) $\bigvee \{x, y, z\}$ existe.

J (9 pts)

Tente achar formulas da linguagem que tenha apenas o predicado de $\leq$, para diferenciar entre os seguintes conjuntos ordenados: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, e $\mathbb{R}$.

K (9 pts)

Sejam P e Q posets, e $\phi : P \hookrightarrow Q$ um order-embedding, ou seja, uma função que satisfaça:

$$x \leq_P y \iff \phi(x) \leq_Q \phi(y).$$

Prove que ϕ é injetora.

L (9 pts)

Sejam P e Q posets, e $\phi : P \hookrightarrow Q$ um order-embedding, ou seja, uma função que satisfaça:

$$x \leq_P y \iff \phi(x) \leq_Q \phi(y).$$

Prove que ϕ é injetora.

M (3 pts)

Seja G grupo. Mostre que:

(1) $a \cdot x = a \cdot y \implies x = y$

(2) $(a^{-1})^{-1} = a$

(3) $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

N (6 pts)

Seja G grupo, e $H \subseteq_{\text{fin}} G$. Prove que:

$$H \text{ subgrupo de } G \iff H \text{ é fechado pela } \cdot.$$

O (3 pts)

Seja G grupo, H subgrupo de G, e $a, b \in G$. Prove que a relação

$$a \equiv b \pmod{H} \overset{\triangle}{\iff} ab^{-1} \in H$$

é uma relação de equivalência.