FMC2, 2016.1
(Turma do Thanos)

Prova 1

Nome:

Matrícula:

Boas provas!

A

A0. (i) Escrevendo as árvores sintáticas, mostre que as seguintes expressões são fórmulas bem formadas da $\mathcal{F}_0$ ou da $\mathcal{F}_1$:[1]

- $(p_3 \vee (p_1 \to p_4))$
- $((\neg(p \wedge q)) \leftrightarrow (q \to r))$
- $\forall x\big((R(x) \wedge Q(x)) \to Q(f(f(x)))\big)$
- $\exists x \forall y\big(R(x,y) \to \neg\exists z Q(x,y,f(z))\big)$

(ii) Fazendo as proprias substituições (passo a passo), transforme as fórmulas seguintes para equivalentes, onde as negações aparecem apenas em frente de fórmulas atômicas:

- $\neg(p \wedge \neg q)$
- $\neg((\neg p) \to (\neg q))$
- $\neg\forall x(R(x) \vee \exists y P(y,x))$
- $\neg\exists x \forall y((\neg R(x)) \vee x = y)$

A1. Seja $\uparrow$ o conectivo lógico definido pela a tabela de valores:

A	B	$A \uparrow B$
0	**0**	**1**
0	**1**	**1**
1	**0**	**1**
1	**1**	**0**

(i) Escreva a tabela de valores da fórmula

$$A = ((p \uparrow q) \to ((\neg r) \wedge q)) .$$

(ii) Ache uma formula B, equivalente de A, tal que os únicos conectivos que aparecem em B são os $\{\neg, \vee, \wedge\}$. (Sabemos que isso é possível por que o conjunto $\{\neg, \vee, \wedge\}$ é *completo.*)

(iii) Mostre que $\{\uparrow\}$ é completo.

(**Dica:** Como $\{\neg, \to\}$, $\{\neg, \vee\}$, e $\{\neg, \wedge\}$ são completos, se achar uma fórmula equivalente de $\neg A$, faltaria apenas achar mais uma equivalente ou de $(A \to B)$, ou de $(A \vee B)$, ou de $(A \wedge B)$).

A2. Sejam as fórmulas:

$$A = \exists x \forall y (P(x, f(y)))$$
$$B = \forall u \forall v \exists w (P(u,w) \wedge P(w,v)).$$

Defina três "mundos" (ou "estruturas") tais que:[2]

- $\mathcal{M}_A$, onde A é válida e B inválida,
- $\mathcal{M}_B$, onde B é válida e A inválida,
- $\mathcal{M}_C$, onde A e B são válidas.

[1] Assuma que todos os símbolos de predicados e de funções estão seguidos para o certo número de argumentos.

[2] Para especificar um mundo, precisa definir qual será o universo dele, e as interpretações dos símbolos de funções e de predicados que aparecem nas fórmulas.

B

B0. A operação $\triangle$, chamada "diferença simétrica" de dois conjuntos, é definida pelo:

$$\begin{aligned} X \triangle Y &= (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) \\ &= (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) \\ &= \{w \mid w \text{ pertence em exatamente um dos } X \text{ e } Y\} \end{aligned}$$

(as 3 definições são equivalentes).

Sejam os conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{0,1,2\}\,; & F_n &= \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq n\}\,; \\ B &= \{1,2,3\}\,; & G_n &= \mathbb{N} \setminus F_n. \\ C &= \{1\}\,; \end{aligned}$$

Calcule os conjuntos (se definidos):

$$\begin{aligned} (A \cup B) \setminus C &= & \bigcup\bigcup \mathcal{P}(\emptyset) &= \\ A \triangle B &= & \bigcup\bigcap \mathcal{P}(\emptyset) &= \\ A \triangle \emptyset &= & \bigcap \{F_n \mid n \in \mathbb{N}\} &= \\ (A \triangle B) \times A &= & \bigcap \{G_n \mid n \in \mathbb{N}\} &= \end{aligned}$$

B1. Seja $\mathcal{N} = \{S \subseteq \mathbb{N} \mid S \text{ finito}, S \neq \emptyset\}$, e seja $\mu : \mathcal{N} \to \mathbb{N}$ a função:

$$\mu(S) = \max S - \min S.$$

(i) Ela é injetora? (Prove tua resposta.)

(ii) Ela é sobrejetora? (Prove tua resposta.)

(iii) Sem usar a função μ, descreve o conjunto $\mu^{-1}[\{0\}]$.

(iv) Explique porque precisamos a restrição de $S \neq \emptyset$.

(v) Explique porque precisamos a restrição de S ser finito.

B2. Sejam A, X, Y conjuntos. Prove que $(A \times (X \uplus Y)) =_{\mathrm{c}} ((A \times X) \uplus (A \times Y))$.

Lembre-se: a operação $\uplus$ é a "união disjunta" de dois conjuntos, definida pelo:

$$A \uplus B = \{(0,a) \mid a \in A\} \cup \{(1,b) \mid b \in B\}\,.$$

.

C

C0. Defina recursivamente as seguintes funções:

(i) *double* $: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, que dobra a entrada dela (sem usar *nem* adição, *nem* multiplicação);

(ii) *happy* $: \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_0$, que "apaga" todas as negações que aparecem numa fórmula;

(iii) *mirror* $: \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_0$, que "espelha" todas as implicações que aparecem numa fórmula: todos os $A \to B$ viram $B \to A$.

Exemplos:

$$\begin{aligned}
\mathit{double}(7) &= 14; \\
\mathit{happy}((\neg(p \land \neg q)) &= (p \land q); \\
\mathit{happy}((\neg p \to (q \lor \neg r))) &= (p \to (q \lor r)); \\
\mathit{mirror}((p \to (q \to r))) &= ((r \to q) \to p) \\
\mathit{mirror}((p \to (q \lor \neg r))) &= ((q \lor \neg r) \to p).
\end{aligned}$$

C1. Umas definições de funções recursivas são:

$$x + 0 = x \qquad \text{(a1)} \qquad\qquad x \cdot 0 = 0 \qquad \text{(m1)}$$
$$x + y^+ = (x + y)^+ \qquad \text{(a2)} \qquad\qquad x \cdot y^+ = (x \cdot y) + x \qquad \text{(m2)}$$

Dado os lemas:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \tag{a-ass}$$
$$a + b = b + a \tag{a-com}$$

prove pelo indução as sequintes propriedades, justificando cada passo:

(i) $a \cdot (x + y) = (a \cdot x) + (a \cdot y)$;

(ii) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

C2. Seja p uma variável proposicional, e sejam as funções recursivas:

$$f : \mathbb{N} \to \mathcal{F}_0 \qquad\qquad g : \mathbb{N} \to \mathcal{F}_0$$
$$f(0) = p \qquad \text{(F1)} \qquad\qquad g(0) = p \qquad \text{(G1)}$$
$$f(n^+) = (f(n) \to p) \qquad \text{(F2)} \qquad\qquad g(n^+) = (p \to g(n)) \qquad \text{(G2)}$$

(i) Calcule os valores $f(2)$ e $g(2)$.

(ii) Prove que *para todo* $n \geq 1$, *a fórmula* $g(n)$ *é tautologia.*

(iii) Verifique se *para todo* $n \geq 1$, *a fórmula* $f(n)$ *é tautologia.*

Só isso. Nada mais.