
Nome:

09/12/2016

Regras:

- I. Não vires esta página antes do começo da prova.
- II. Nenhuma consulta de qualquer forma.
- III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).¹
- IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.
- V. $\forall x [\text{Colar}(x) \rightarrow \neg \text{Passar}(x, \text{FMC1})]$.²
- VI. Use caneta para tuas respostas.
- VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho antes de usá-la.
- VIII. Entregue *todas* as folhas de rascunho juntas com tua prova.
- IX. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.
- X. Os pontos bônus duma unidade são considerados apenas para quem consiga passar sem.³

Esclarecimentos:

1. Podes deixar fatoriais ($n!$), permutações ($P(n, r)$) e combinações ($C(n, r)$) nos teus cálculos.
2. Nas “respostas” *não* precisa explicar teu raciocínio, mas *não escreva apenas um valor final*; Exemplo: $9!C(9, 5)$ é aceitavel como resposta, mas seu valor 45722880 sem explicação, não!
3. Nas “resoluções” explique *curtamente* a ideia da tua resolução.

Boas contas!

¹Ou seja, *desligue antes* da prova.

²Se essa regra não faz sentido, melhor já desistir.

³Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota final de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

(10 + 8^b) **A**

Definição 0. (Informal)

Sejam $n, r \in \mathbb{N}$ com $r \leq n$. Usamos $C(n, r)$ para denotar o número de maneiras de escolher sem repetições r objetos duma colecção de n objetos distintos.

Definição 1. (Formal, não-recursiva)

Sejam $n, r \in \mathbb{N}$ com $r \leq n$. Definimos

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

Prove que para todos os inteiros positivos n, r com $r < n$,

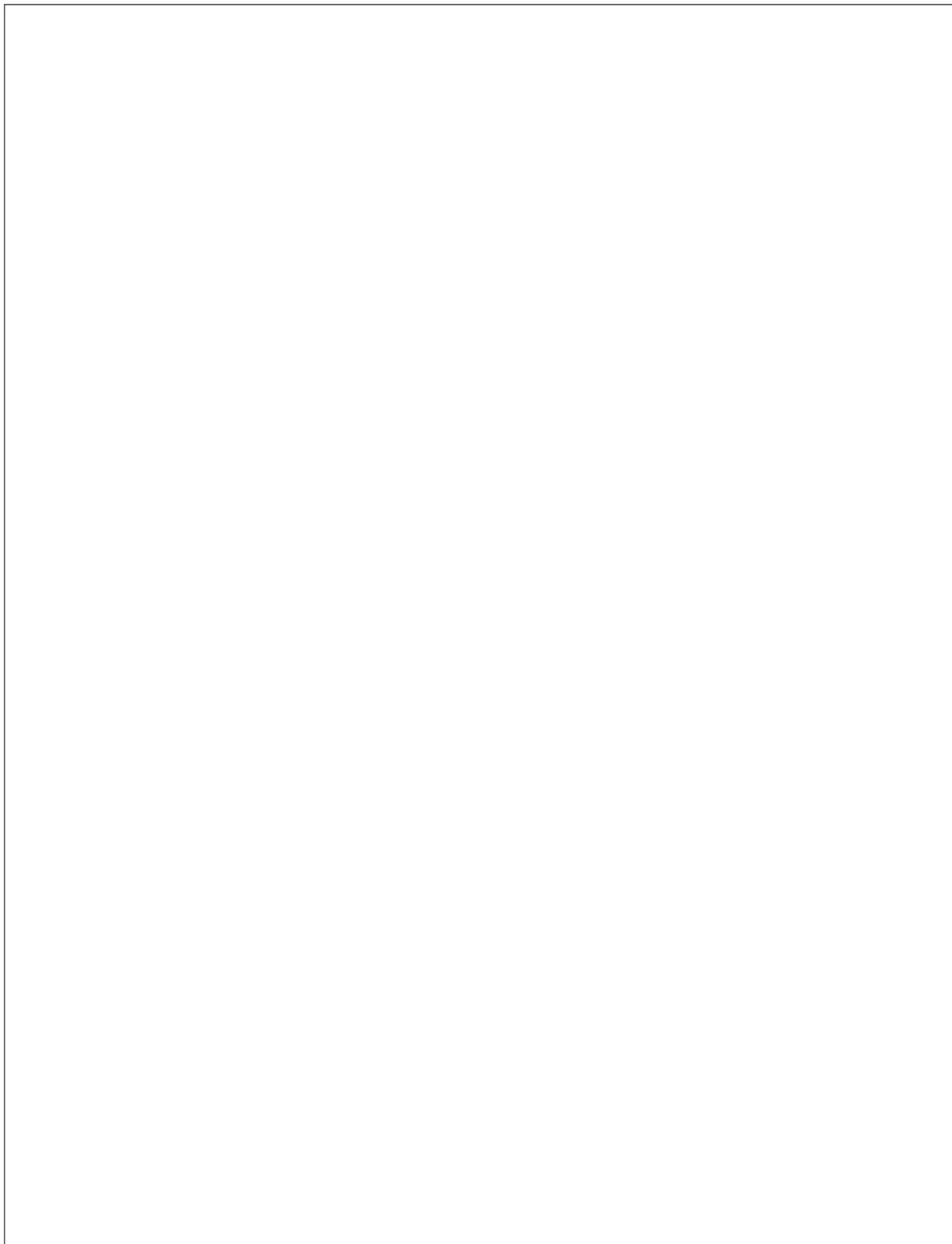
$$C(n, r) = C(n-1, r) + C(n-1, r-1).$$

(10) **A1.** ... usando a Definição 0 e idéias e princípios de contagem.

PROVA.

(8^b) **A2.** ... usando apenas a Definição 1.

PROVA.

A large empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to write the proof of statement A2. The box occupies most of the page below the 'PROVA.' label.

(10) **B**

Num jogo de loteria, tem os números de 1 até 60:

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

Os organizadores do jogo, escolhem aleatoriamente 6 números deles (sem repetições). Esses 6 números são chamados “a megasena”. Um jogador marca pelo menos 6 números na sua loteria e se conseguir ter marcados todos os 6 da megasena, ganha.

(Marcando mais que 6 números, as chances do jogador aumentam, mas o preço da loteria aumenta também.)

(3) **B1.** Um jogador marcou 6 números. Qual a probabilidade que ele ganhe?

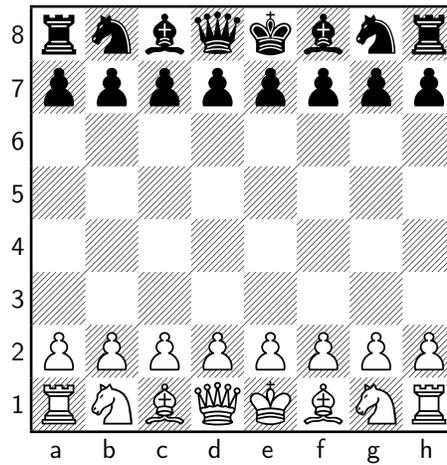
RESPOSTA.

(7) **B2.** Uma jogadora marcou 9 números. Qual a probabilidade que ela ganhe?

RESPOSTA.

(10) C

No xadrez, as regras mandam que as posições iniciais do jogo são as seguintes:



Um professor de xadrez pediu para seu aluno na segunda aula de xadrez colocar as peças brancas nas suas posições iniciais. O aluno—ele não é o melhor—lembra apenas:

(i) as posições de todos os peões brancos (são todos na linha 2).

(6) **C1.** Sem querendo assumir sua ignorância, o aluno colocou todas as outras peças na primeira linha chutando.

Qual a probabilidade que ele acertou?

RESOLUÇÃO.

(4) **C2.** Se o aluno lembrar mais uma regra:

(ii) a rainha branca (♛) começa num quadradinho branco;

qual seria a probabilidade dele acertar?

RESPOSTA.

(16) **D**

Considere os inteiros $1, 2, \dots, 30$.

(1) **D0.** De quantas maneiras podemos os permutar?

RESPOSTA:

(15) **D1.** Quantas dessas permutações têm a propriedade que nenhum dos múltiplos de 3 estão em posições consecutivas?

RESOLUÇÃO.

(24) **E**

De quantas maneiras podemos escrever um string usando letras do alfabeto $\{A, B, C, D\}$, tais que *cada letra é usada exatamente duas vezes mas não aparece consecutivamente no string?*

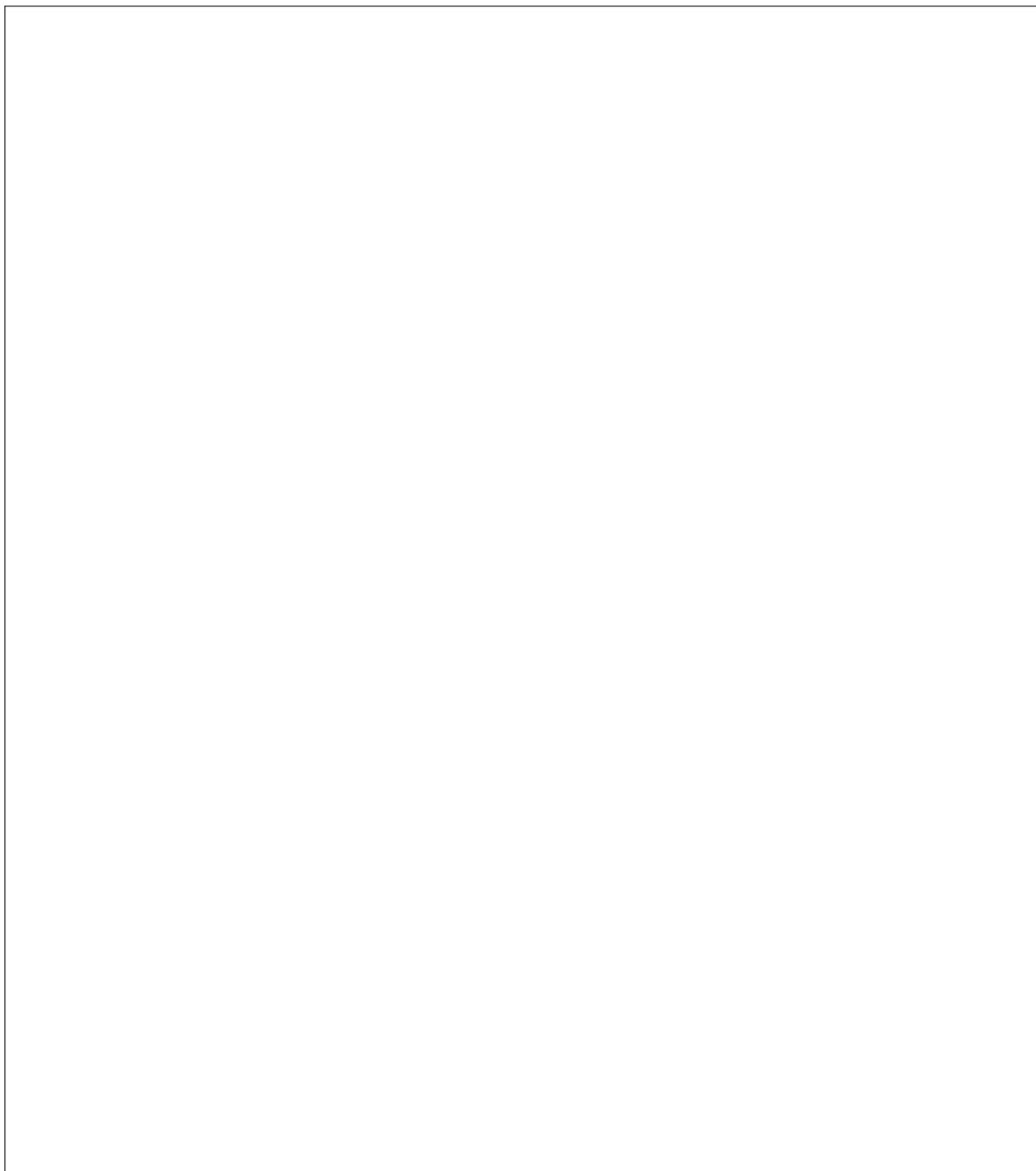
Por exemplo:

ABADCDBC é um string aceitável;

ABACDDBC não é.

Dica: Inclusão-Exclusão.

RESOLUÇÃO.



(18) **F**

Temos 6 músicos disponíveis, onde cada um toca:

Alex: violão, guitarra, baixo Daniel: guitarra

Bill: bateria Eduardo: piano, teclado, violão, fláuto

Claudia: saxofone, clarinete Fagner: guitarra, baixo, teclado

(Considere que uma banda precisa *pelo menos um membro*, todos os membros duma banda *precisam tocar pelo menos algo na banda*, e que cada banda é diferenciada pelos músicos e suas funções. Por exemplo: uma bande onde Alex toca o violão (apenas) e Bill a bateria, é diferente duma banda onde Alex toca o violão *e* a guitarra, e Bill a bateria, mesmo que seus membros podem ser os mesmos.

Dica: Tradução.

(6) **F1.** Quantas bandas diferentes podemos formar?

RESOLUÇÃO.

(6) **F2.** Quantas bandas diferentes podemos formar com a restrição que nenhum músico tocará mais que um instrumento na banda (mesmo se em geral sabe tocar mais)?

RESOLUÇÃO.

(6) **F3.** Quantas bandas diferentes podemos formar onde todos os músicos fazem parte da banda?

RESOLUÇÃO.

(24) **G**

De quantas maneiras podemos escrever um string ternário (usando o alfabeto $\{0, 1, 2\}$) de tamanho 7, tais que *nunca aparece neles o substring* 00.

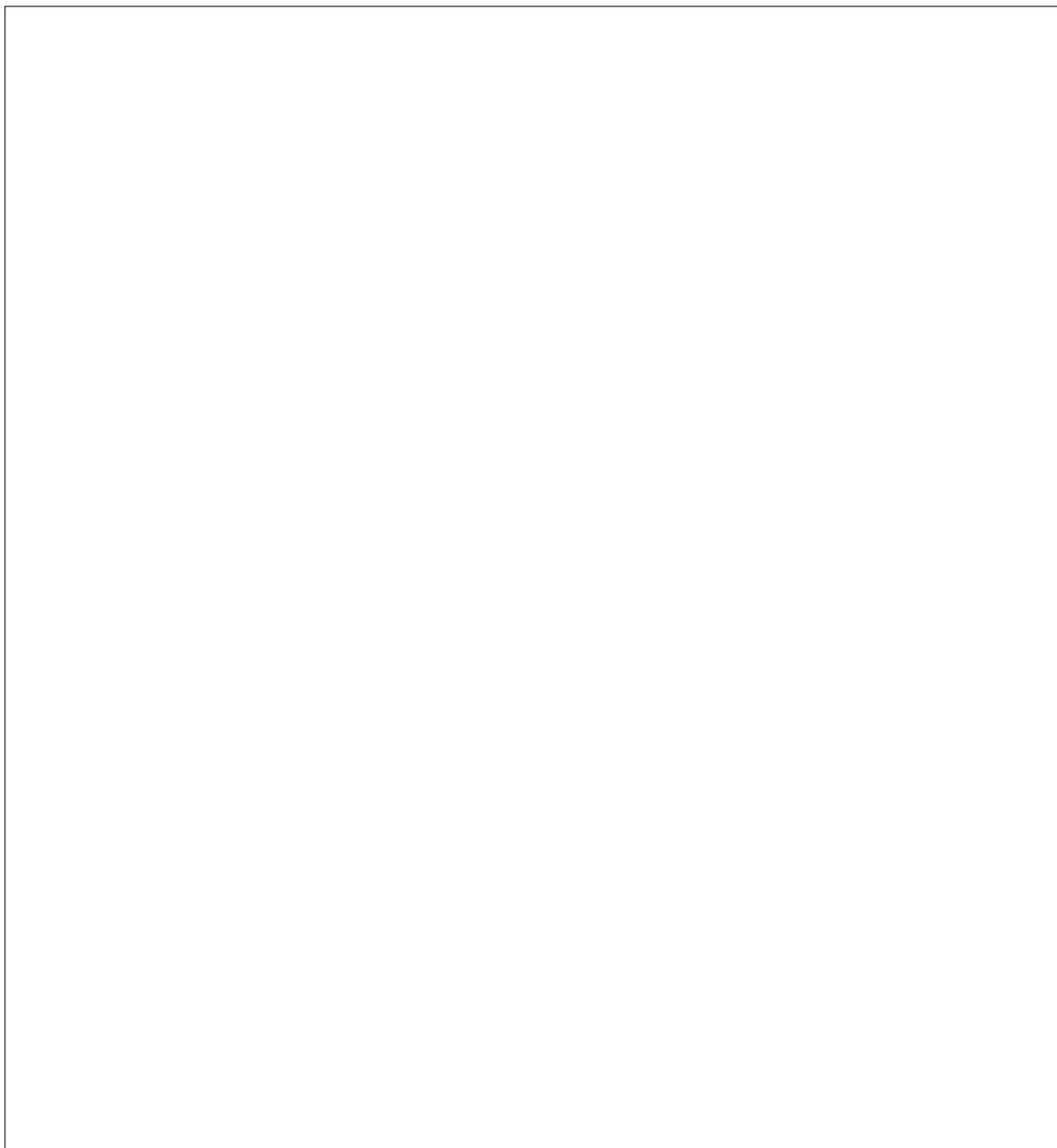
Por exemplo:

0112220 é um string aceitavel;

2001000 não é.

Dica: Recursão.

RESOLUÇÃO.



(16) **H**

Conta todas as palavras feitas por permutações das 12 letras da palavra

PESSIMISSIMO

onde...

(3) **H0.** A palavra começa com P.

RESPOSTA.

(3) **H1.** Todos os I aparecem *juntos*.

RESPOSTA.

(5) **H2.** Todos os M aparecem *separados*.

RESPOSTA.

(5) **H3.** Nenhum dos S aparece ao lado de outro S.

RESPOSTA.

Só isso mesmo.

RASCUNHO

RASCUNHO

RASCUNHO

RASCUNHO