FMC1, 2016.2
(Turmas do Thanos)

Prova 2
(points: 120/100; bonus: $18^\flat$; time: 100')

Nome:

23/11/2016

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\, [\mathrm{Colar}(x) \to \neg \mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC1})]$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho antes de usá-la.

VIII. Entregue *todas* as folhas de rascunho juntas com tua prova.

IX. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

X. Os pontos bônus duma unidade são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor já desistir.
[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota final de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

(14) **A**

(4) **A0.** Sejam $a, b, m \in \mathbb{Z}$ com $m > 0$. Defina formalmente (com fórmulas de lógica) as relações "a divide b" e "a congruente b módulo m". Considere como universo o conjunto de inteiros $\mathbb{Z}$.

DEFINIÇÕES.

$$a \mid b \overset{\triangle}{\iff} \boxed{}$$

$$a \equiv b \pmod{m} \overset{\triangle}{\iff} \boxed{}$$

(10) **A1.** Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Considere as proposições:

$$a \mid b + c \ \ \& \ \ a \mid b - c \implies a \mid b\,; \tag{i}$$

$$a \mid b + c \ \ \& \ \ a \mid b + 2c \implies a \mid b\,. \tag{ii}$$

Para cada uma, se ela é verdadeira, prova-la; se não, ache um contraexemplo.

RESPOSTA.

(42) **B**

(18) **B1.** Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Prove que

$$(a, b) = (a, a + b).$$

Dica: *Lembre a definição de m.d.c. e que para* $x, y \in \mathbb{N}$, $x \mid y \;\&\; y \mid x \implies x = y$.

PROVA.

(24) **B2.** Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$, $(F_n, F_{n+1}) = 1$, onde F_n é o n-ésimo termo da sequência Fibonacci. Lembra-se a definição:

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 0 \\
F_1 &= 1 \\
F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n.
\end{aligned}
$$

PROVA.

(50 + $6^\flat$) **C**

(24) **C1.** Prove que para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$13 \mid n(n^6 - 1)(n^6 + 1).$$

PROVA.

(26 + 6$^\flat$) **C2.** Seja $f : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Q}$ a função recursiva definida pela equação

$$f(c,x,y) = \begin{cases} c^2 + x + 2y, & \text{se } c \equiv 0 \pmod 3 \\ 2cx + 10y, & \text{se } c \equiv 1 \pmod 3 \\ f(c^2, x^y, y^x), & \text{senão.} \end{cases}$$

(5) (i) Calcule os valores: $f(3,3,8)$, $f(25,8,9)$, $f(-5,2,3)$.

(6$^\flat$) (ii) Explique curtamente porque a f sempre termina.

(21) (iii) Prove que para todos $c, x \in \mathbb{Z}$,

$$3 \mid f(c,x,x).$$

Dica: $a \mid b \iff b \equiv 0 \pmod{a}$.

Resolução.

(10) **D**

Ache um inteiro *positivo* $z > 0$ que satisfaz a congruência:

$$13z \equiv 1 \pmod{50}.$$

Dica: *Euclides!*

Resolução.

$(4 + 12^\flat)$ **E**

Seja $C \subseteq \mathbb{Z}$ um conjunto cujos elementos são coprimos dois a dois.

(4) **E0.** Descreva formalmente (com uma fórmula de lógica) o que significa a frase:

"*os elementos do C são coprimos dois a dois*".

Fórmula:

$(12^\flat)$ **E1.** Ache uma infinidade de conjuntos infinitos com essa propriedade.

Resolução.

Só isso mesmo.

RASCUNHO

Rascunho